



Matemáticas
Volumen II

Beatriz Campos Sancho
Joaquín Castelló Benavent

Matemáticas
Volumen II

Beatriz Campos Sancho
Joaquín Castelló Benavent



DIPLOMATURA EN CIÈNCIES EMPRESARIALS

- Codi assignatura C08
- Curs 2008/2009 1er semestre

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia, 1
www.sapientia.uji.es

ISBN: 978-84-691-4662-0



Índice general

TEMA 1

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

1.1. INTRODUCCIÓN

En el estudio de modelos económicos encontramos funciones que dependen de dos o más variables. El siguiente ejemplo nos muestra una función de beneficios que depende de dos variables:

Ejemplo 1.1 Los beneficios de una empresa, calculados en función del capital invertido en innovación tecnológica y en publicidad, vienen determinados por la función:

$$B(x, y) = 6x + 10y - x^2 - y^2$$

donde la variable x representa la cantidad de euros (en miles) invertidos en tecnología y la variable y representa la cantidad de euros (en miles) invertidos en publicidad.

Ejemplo 1.2 Lanzamos un nuevo producto al mercado y observamos que la demanda depende no sólo del precio del producto, p, sino también del precio de otros productos similares que se encuentran en el mercado, (p_1, p_2, p_3). Si además influye también la variable publicidad, supongamos que z representa la cantidad de anuncios que aparecen mensualmente en prensa, tenemos entonces una función de cinco variables:

$$D = f(p, p_1, p_2, p_3, z)$$

Ejemplo 1.3 R. Stone calculó que la demanda de la cerveza en Inglaterra se podía escribir aproximadamente:

$$X = 1.058\ x_1^{0.136}\ x_2^{-0.727}\ x_3^{0.914}\ x_4^{0.816}$$

donde

x_1 : renta del individuo
x_2 : precio de la cerveza
x_3 : índice general de precios de otros bienes
x_4 : fortaleza de la cerveza.

Aunque centraremos nuestro estudio en las funciones de dos o tres variables, podemos generalizar los conceptos a más variables; es decir, a n variables.

Definición 1.1 Una *función real de n variables reales* es una aplicación f que a cada vector $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ le hace corresponder un valor z de $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) \rightarrow z = f(x_1, ..., x_n) \end{array}$$

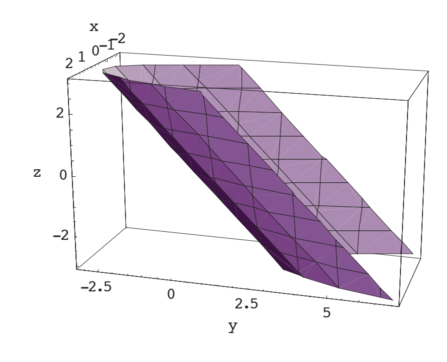
1.2. GRÁFICAS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Definición 1.2 La gráfica de una función de dos variables se define como el conjunto:

$$graf(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 / \ (x, y) \in dom(f)\}$$

que constituye una superficie en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1.4 La gráfica de la función $f(x, y) = x^2 - y$ es:



1.2.1. Curvas de nivel

La representación mediante curvas de nivel nos da una idea de cómo es la gráfica de una función de dos variables.

Definición 1.3 Una *curva de nivel* de una función es el lugar geométrico de los puntos en los que la función toma el mismo valor.

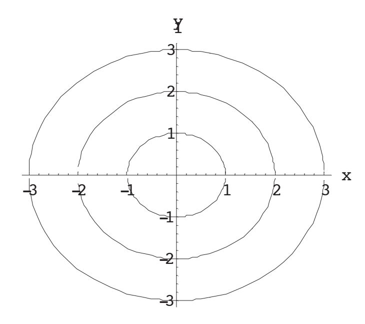
Las curvas de nivel no se cortan nunca, puesto que un punto no puede tener dos imágenes. Las curvas de nivel de un función se obtienen cortando la superficie representativa de la función por planos horizontales de altura c. Por ello, se obtendrán igualando la función dada a valores constantes y representando en el plano (x, y) las ecuaciones así obtenidas.

Ejemplo 1.5 Dibuja las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

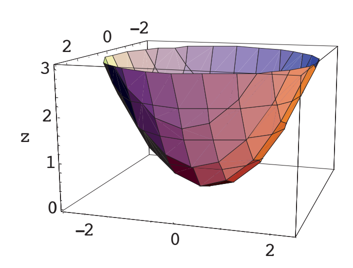
Solución. Igualando la función f a valores constantes tenemos:

$$f(x, y) = c \rightarrow x^2 + y^2 = c$$

Las ecuaciones obtenidas, $x^2 + y^2 = c$, representan en el plano (x, y), circunferencias centradas en el origen y radio $\sqrt{c}$ para valores $c > 0$, para $c = 0$ se tiene un único punto, el $(0, 0)$ y para valores $c < 0$ no hay curvas de nivel. Si dibujamos varias de estas curvas, por ejemplo para los valores $c = 1$, $c = 4$, $c = 9$ se tiene:



Vemos a medida que el valor de c aumenta, se tienen circunferencias de radio mayor. Como estas circunferencias corresponden al corte de la superficie con el plano $z = c$, podemos visualizar la superficie como una sucesión de estas curvas de menor a mayor radio a medida que aumenta z:



▲

Ejercicio 1.1 Dibuja las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 - y$.

Ejercicio 1.2 Obtén la gráfica de la función $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ mediante curvas de nivel.

1.3. DERIVADAS PARCIALES

Cuando estudiamos una función de una variable, $y = f(x)$, su derivada $f'(x)$ mide la tasa de variación de la función cuando la variable x cambia. Para funciones de dos o más variables queremos estudiar la variación de la función respecto de los cambios producidos en cada variable independiente cuando el resto de variables permanecen constantes.

Para el caso de una función de dos variables $z = f(x, y)$, queremos estudiar cómo varía f respecto de una variación de x cuando y permanece constante y

cómo varía f respecto de y cuando x permanece constante. Obtenemos así las llamadas derivadas parciales de f respecto de x y de y, respectivamente.

Definición 1.4 *Derivada parcial* de la función $z = f(x, y)$ *respecto de* x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Derivada parcial de la función $z = f(x, y)$ respecto de x en un punto (x_o, y_o) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)}{h}$$

Definición 1.5 *Derivada parcial* de la función $z = f(x, y)$ *respecto de* y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Derivada parcial de la función $z = f(x, y)$ respecto de y en un punto (x_o, y_o) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o, y_o + h) - f(x_o, y_o)}{h}$$

Esta definición se generaliza para más variables.

A efectos prácticos y para la clase de funciones con las que trabajaremos habitualmente, podemos aplicar las reglas de derivación conocidas, teniendo en cuenta que al derivar respecto de una variable, el resto de variables han de considerarse constantes.

Ejemplo 1.6 Calcula las derivadas parciales de la función:

$$f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2 + x + y^2$$

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 y + 2xy^2 + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^3 + 2x^2 y + 2y. \ \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7 Calcula las derivadas parciales de la función:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y(x^2 + y^2) - xy2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x(x^2 + y^2) - xy2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \ \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejemplo 1.8 Calcula las derivadas parciales de la función:

$$f(x,y) = x^2 \sin y$$

en el punto $(2,0)$.

Solución. Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \sin y \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2 \cos y
\end{aligned}$$

y sustituimos el punto. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(2,0) &= 4. \ \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.9 Calcula las derivadas parciales de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en el punto $(0,0)$.

Solución. En este caso tenemos que aplicar la definición de derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1. \ \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.10 Calcula las derivadas parciales de la función:

$$f(x,y,z) = x^2yz + z \ln y - \frac{xy}{z}$$

Solución. En este caso tenemos una función de tres variables, por tanto tendremos tres derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2xyz - \frac{y}{z} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= x^2z + z\frac{1}{y} - \frac{x}{z} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= x^2y + \ln y + \frac{xy}{z^2}. \ \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.3 Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = \cos 3x \ \sin(x-y)$

ii) $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{x-y}$

iii) $f(x,y,z) = \sin(2x-z^2) - \ln(xy-z)$

iv) $f(x,y) = e^{x^2} - \ln(\dfrac{xy}{2})$

v) $f(x,y) = e^{3x^2y}\ln(x+3y)$

vi) $f(x,y) = x^2 \arctan(\frac{x}{y})$

vii) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^3}\sin^2 z$

viii) $f(x,y) = x^y$

ix) $f(x,y,z) = x \ y^{x+z}$

1.3.1. La diferencial de una función de dos variables

Definición 1.6 Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables con derivadas parciales. Si dx y dy son números reales arbitrarios, definimos la *diferencial* de $z = f(x,y)$ en (x,y) y se designa por dz ó df, como:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

Cuando la variable x varía a $x+dx$ y la variable y varía a $y+dy$, la variación de la función es el incremento dado por:

$$\Delta z = f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$$

Si dx y dy son pequeños, entonces Δz se puede aproximar por dz :

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

Ejemplo 1.11 Halla la diferencial total de la función $f(x,y) = xy$, en el punto $(2,3)$ para los incrementos dx =0.1 y dy =0.2.

Solución.

$$dz = y\,dx + x\,dy$$

luego en el punto $(2,3)$:

$$dz\,\Big|_{(2,3)} = 3\cdot 0.1 + 2\cdot 0.2 = 0.7$$

Podemos comparar el resultado con el incremento total de la función:

$$\Delta z = f(2.1, 3.2) - f(2, 3) = 6.72 - 6 = 0.72. \blacktriangle$$

1.3.2. Derivadas parciales de orden superior

Dada una función de dos variables $z = f(x, y)$, sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, llamadas derivadas parciales primeras, son a su vez funciones de las variables x e y. A partir de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, podemos construir dos nuevas funciones tomando sus derivadas parciales respecto de x e y. Del mismo modo podemos tomar las derivadas parciales de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ respecto de x e y. Las cuatro funciones así obtenidas se llaman derivadas parciales segundas de $f(x, y)$ y se les denota:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ejemplo 1.12 Calcula las derivas parciales segundas de la función:

$$f(x, y) = 2x^2y + xy^2 + x^3 + y.$$

Solución. Calculamos en primer lugar las derivadas parciales primeras:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4xy + y^2 + 3x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^2 + 2xy + 1 \end{aligned}$$

por tanto, las derivadas segundas son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(4xy + y^2 + 3x^2) = 4y + 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 2xy + 1) = 4x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(4xy + y^2 + 3x^2) = 4x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + 2xy + 1) = 2x. \blacktriangle$$

Ejemplo 1.13 Si $f(x, y) = \sin x + y^3 e^{2x}$, calcula las derivas parciales segundas en $(0, 1)$.

Solución. Calculamos en primer lugar las derivadas parciales primeras:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos x + 2y^3 e^{2x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 e^{2x} \end{aligned}$$

por tanto, las derivadas segundas son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x + 2y^3 e^{2x}) = -\sin x + 4y^3 e^{2x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 e^{2x}) = 6y^2 e^{2x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos x + 2y^3 e^{2x}) = 6y^2 e^{2x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 e^{2x}) = 6ye^{2x}$$

Finalmente sustituimos el punto $(0, 1)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 6. \ \blacktriangle$$

Observemos que en los ejemplos anteriores las derivadas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ coinciden.

De manera similar se definen las derivadas parciales 3as, $4^{as}, ...$

Ejemplo 1.14 Sea $f(x, y) = x^3 \sin(3x + 2y)$. Calcula $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$.

Solución. La derivada parcial tercera pedida es la siguiente:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}))$$

Comenzaremos calculando la derivada parcial primera respecto de y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 \cos(3x + 2y)$$

a continuación, volvemos a derivar respecto de y para obtener la derivada segunda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = -4x^3 \sin(3x + 2y)$$

Finalmente, derivando la expresión anterior respecto de x llegamos a la derivada tercera que buscamos:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) = -12x^2 \sin(3x + 2y) - 12x^3 \cos(3x + 2y). \ \blacktriangle$$

Conmutatividad de las derivadas sucesivas

Teorema 1 (Teorema de Schwarz) *Dada una función $z = f(x, y)$, si*

(i) $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *en un entorno de un punto* (x_o, y_o),

(ii) $\exists\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *en un entorno de un punto* (x_o, y_o) *y es continua,*

entonces,
$\exists\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *y además* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Este teorema se puede generalizar a n variables.

Ejemplo 1.15 Calcula las derivadas parciales de segundo orden de

$$f(x, y) = 3x \sin y + y^3 \cos 4x$$

Solución. Calculamos en primer lugar las derivadas primeras:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3 \sin y - 4y^3 \sin 4x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3x \cos y + 3y^2 \cos 4x \end{aligned}$$

Volviendo a derivar se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -16y^3 \cos 4x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -3x \sin y + 6y \cos 4x \end{aligned}$$

Calculamos ahora $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3 \cos y - 12y^2 \sin 4x$$

puesto que esta función existe y es continua en $\mathbb{R}^2$, se verifican las condiciones del teorema de Schwarz, por tanto también existe en $\mathbb{R}^2$ la función $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y además coincide con $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. ▲

Ejercicio 1.4 Calcula $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ y $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$, siendo $f(x, y, z) = e^{xy} \cos z$ comprobando que coinciden.

Ejercicio 1.5 Dada la función $u(x, y, z) = z^2 e^{x+5y}$, calcula:

a) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial z \partial y \partial x^2}$ *b)* $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$

NOTA: Las funciones con las que tabajaremos en este curso verifican las condiciones del teorema de Schwarz, por ello no nos preocuparemos del orden de derivación, ya que las derivadas cruzadas siempre coincidirán.

1.3.3. Derivadas de funciones compuestas

Muchos modelos económicos manejan funciones compuestas. Se trata de funciones de una o más variables que a su vez son funciones de otras variables, que llamaremos variables básicas.

Ejemplo 1.16 Supongamos que la cantidad producida (output) P es función del capital C y del trabajo T y ambos, a su vez, son funciones del tiempo t:

$$P = 3C^2 + e^T$$

donde

$$C(t) = 100 + 2t$$
$$T(t) = 2t^3$$

¿Cómo varía la cantidad producida con el tiempo? es decir, ¿cuánto vale $\frac{dP}{dt}$?

En general, ¿cómo varía el valor de una función compuesta cuando varían los valores de sus variables básicas?

Puesto que se nos presentarán diferentes casos para cada problema, podemos elaborar un esquema de árbol para obtener fácilmente las fórmulas de las derivadas correspondientes.

I) $z = F(x, y)$ con $x = f(t)$, $y = g(t)$:

```
      x — t
    /
  F
    \
      y — t
```

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ejemplo 1.17 Calcula $\frac{dz}{dt}$, siendo $z = F(x, y) = x^5 - y^2$, donde $x = t^2$ e $y = e^t$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 5x^4 2t - 2ye^t = \\ &\quad \text{(teniendo en cuenta los valores de } x \text{ e } y \text{ en función de } t\text{)} \\ &= 10t^9 - 2e^{2t}. \ \blacktriangle\end{aligned}$$

Ejemplo 1.18 Calcula $\frac{dz}{dx}$ siendo $z = F(u, v) = \frac{u}{v}$, donde $u = \sin x$ y $v = e^x$.

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}\cos x + \frac{-u}{v^2}e^x = \\ &\ \text{(teniendo en cuenta los valores de } u \text{ y } v \text{ en función de } x\text{)} \\ &= \frac{1}{e^x}\cos x - \frac{\sin x}{e^{2x}}e^x = e^{-x}\cos x - \sin x e^{-x} = e^{-x}(\cos x - \sin x). \ \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejercicio 1.6 Calcula $\frac{du}{dt}$ siendo $u = xy + yz + xz$, donde $x = e^t$, $y = \frac{1}{t}$ y $z = \frac{t}{2}$.

II) $z = F(x, y, t)$ con $x = f(t)$, $y = g(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Ejemplo 1.19 Calcula $\frac{dz}{dt}$ siendo $z = F(x, y, t) = x^2 + y^2 + e^{3t}$, donde $x = \ln t$ e $y = \cos t$.

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 2x\frac{1}{t} + 2y(-\sin t) + 3e^{3t} = \\ &\ \text{(teniendo en cuenta los valores de } x \text{ e } y \text{ en función de } t\text{)} \\ &= \frac{2\ln t}{t} - 2\sin t\cos t + 3e^{3t}. \ \blacktriangle \end{aligned}$$

De modo análogo se derivan las funciones compuestas de dos o más variables

III) $z = F(u, v)$ con $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Ejemplo 1.20 Sea $z = 2u + 3v$, donde $u = x^2 + \cos y$ y $v = y\cos x$. Calcula las derivadas parciales primeras de z respecto de x y de y.

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2(2x) + 3(-y\sin x) = 4x - 3y\sin x. \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2(-\sin y) + 3(\cos x) = -2\sin y + 3\cos x \ \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejercicio 1.7 Sea $z = (1+u)^v + 3w$, donde $u = \sqrt{x^2+y^2}$, $v = e^{xy}$ y $w = \sin x$. Calcula las derivadas parciales primeras de z respecto de x y de y.

También podremos calcular derivadas sucesivas.

Ejemplo 1.21 Sea $z = u^2 + u \sin v$, donde $u = 3x + y$ y $v = 2xy$. Calcula $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Solución. Calculamos la derivada parcial primera respecto de x :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (2u + \sin v)3 + (u \cos v)2y = \\
&\quad \text{(teniendo en cuenta los valores de } u \text{ e } v \text{ en función de } x \text{ e } y) \\
&= 18x + 6y + 3\sin(2xy) + (6xy + 2y^2)\cos(2xy)
\end{aligned}$$

Derivando esta expresión parcialmente respecto de x se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 18 + 6y\cos(2xy) + 6y\cos(2xy) + (6xy + 2y^2)(-\sin(2xy)2y) \\
&= 18 + 12y\cos(2xy) - (12xy^2 + 4y^3)\sin(2xy). \ \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.8 Sea $f(x, y, z) = xy \cos z^2$, donde $x = \sin t$, $y = e^t$ y $z = t^2 + 1$. Halla $\dfrac{df}{dt}$.

Ejercicio 1.9 Sea $f(u, v) = v \sin u$, donde $u = e^{x+3y}$ y $v = \ln(y^2+z^2)$. Calcula las parciales primeras de f respecto de sus variables básicas.

Ejercicio 1.10 Sea $f(u, v) = u^2+uv^3$, donde $u = \sqrt{x^2+y^4}$ y $v = e^x$. Calcula las parciales segundas de f respecto de x y de y.

1.4. FUNCIONES VECTORIALES

Definición 1.7 Una *función vectorial* de n variables es una aplicación

$$\begin{aligned}
f : \ & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\
& (x_1, ..., x_n) \rightarrow (y_1, ..., y_m) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))
\end{aligned}$$

A las funciones $f_1, ..., f_m$ se les llama funciones *coordenadas* o *componentes* de f.

- Una función vectorial f es continua en un punto $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ si lo son cada una de sus componentes.
- Una función vectorial f es diferenciable en un punto $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ si sus componentes son funciones continuas con derivadas continuas en dicho punto.

Ejemplo 1.22 La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y) = (x^3 + y, x - y, y^2)$$

es una función vectorial de 2 variables y tres componentes.

Definición 1.8 Dada una función vectorial diferenciable de n variables y m componentes, $f = (f_1, ..., f_m)$, se llama *matriz jacobiana* de f a la matriz de dimensión $m \times n$ formada por las derivadas parciales de las componentes de f :

$$Jf = Df(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.23 La matriz jacobiana correspondiente a la función del ejemplo 1.22 es la matriz de dimensión 3×2:

$$Jf = Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

1.4.1. Composición de funciones vectoriales

Dadas las funciones vectoriales $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$, la función compuesta $h = g \circ f$ es una función vectorial $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$; es decir, de n variables $(x_1, ..., x_n)$ y m componentes $(h_1, ..., h_m)$:

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m}_{h=g\circ f}$$

Ejemplo 1.24 Dada la función $f(x, y, z) = (2\,x\,y + z \;,\; x + y^2)$ y dada la función $g(u, v) = (u + e^v, v + e^{2u})$, el esquema de la función compuesta es

$$\underset{(x,\,y,\,z)}{\mathbb{R}^3} \;\overset{f}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}\; \overset{\mathbb{R}^2}{(\underbrace{2x\,y + z}_{u}, \underbrace{x + y^2}_{v})} \;\overset{g}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}\; \overset{\mathbb{R}^2}{(\underbrace{u + e^v}_{h_1}, \underbrace{v + e^{2u}}_{h_2})}$$

La función compuesta será una función h de 3 variables (x, y, z) y dos componentes (h_1, h_2). Si realizamos la composición obtenemos:

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= (g \circ f)(x, y, z) = g(f(x, y, z)) = g((2xy + z, x + y^2)) \\ &= (2xy + z + e^{x+y^2}, x + y^2 + e^{4xy+2z}) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.11 Calcula la matriz jacobiana de la función h del ejemplo anterior.

Cálculo de la Jacobiana aplicando la regla de la cadena

Nuestro objetivo es obtener la matriz jacobiana de una función compuesta sin realizar la composición, aplicando la siguiente regla:

Propiedad 1 (Regla de la cadena) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ una función diferenciable en un punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ y sea $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en el punto $\vec{b} = f(\vec{a})$. Entonces, la función compuesta $h = g \circ f$ es diferenciable en el punto $\vec{a}$ y además se cumple:*

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(\vec{a}) &= D(g(f(\vec{a})) = \\ &= Dg(\vec{b}) \cdot Df(\vec{a}) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.25 Consideremos la composición de funciones del ejemplo anterior y calculemos la jacobiana.

Solución. Veamos cómo calcular la jacobiana de la composición mediante el producto de matrices. La jacobiana de la función $f(x, y, z) = (2xy + z,\ x + y^2)$ es:

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 1 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

La jacobiana de la función $g(u, v) = (u + e^v, v + e^{2u})$ es:

$$Dg(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & e^v \\ 2e^{2u} & 1 \end{pmatrix}$$

que calculada en $f(x, y, z)$ es:

$$Dg(f(x, y, z)) = Dg(2xy + z,\ x + y^2) = \begin{pmatrix} 1 & e^{x+y^2} \\ 2e^{2(2xy+z)} & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$Dh(x, y, z) = D(g(f(x, y, z)) = Dg(f(x, y, z)) \cdot Df(x, y, z) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^{x+y^2} \\ 2e^{2(2xy+z)} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y & 2x & 1 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2y + e^{x+y^2} & 2x + 2ye^{x+y^2} & 1 \\ 4ye^{4xy+2z} + 1 & 4xe^{4xy+2z} + 2y & 2e^{4xy+2z} \end{pmatrix} . \blacktriangle$$

Además de calcular la matriz jacobiana de la composición de dos funciones mediante producto de matrices, también podemos hallarla mediante esquemas de árbol y aplicando la regla de la cadena como en la sección anterior.

Ejemplo 1.26 Consideremos de nuevo el ejemplo anterior y calculemos la jacobiana.

Solución. La jacobiana de la función compuesta h es la matriz:

$$Jh = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y} & \dfrac{\partial h_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y} & \dfrac{\partial h_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1(u, v) \\ h_2 &= h_2(u, v) \end{aligned}$$

donde $u = 2x\,y + z$ y $v = x + y^2$.

Por tanto, las derivadas parciales de h_1 y h_2 se obtendrán aplicando la regla de la cadena vista en la sección anterior:

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \cdot 2y + e^v \cdot 1 =$$
(teniendo en cuenta los valores de u y v en función de x e y)
$$= 2y + e^{x+y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial y} &= \frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 1 \cdot 2x + e^v \cdot 2y = \\ &\quad \text{(teniendo en cuenta los valores de } u \text{ y } v \text{ en función de } x \text{ e } y) \\ &= 2x + 2ye^{x+y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial z} = \frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 1 = 1$$

Análogamente, se calculan las parciales de la segunda componente de la función compuesta:

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2u}2y + 1 = 4ye^{4xy+2z} + 1$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y} = \frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2u}2x + 2y = 4xe^{4xy+2z} + 2y$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial z} = \frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} = 2e^{2u} = 2e^{4xy+2z}$$

La matriz jacobiana de la función compuesta h es:

$$Jh = \begin{pmatrix} 2y + e^{x+y^2} & 2x + 2ye^{x+y^2} & 1 \\ 4ye^{4xy+2z} + 1 & 4xe^{4xy+2z} + 2y & 2e^{4xy+2z} \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

Ejemplo 1.27 Dadas las funciones $f(t) = (t^2+1, e^t)$ y $g(u,v) = (uv, \frac{u}{v})$, calcula la jacobiana de la función $h = g \circ f$.

Solución. El esquema de la composición es:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow & (\underbrace{t^2+1}_{u}, \underbrace{e^t}_{v}) & \longrightarrow & (\underbrace{uv}_{h_1}, \underbrace{\frac{u}{v}}_{h_2}) \end{array}$$

La jacobiana de h será una matriz de dimensión 2×1:

$$Jh = \begin{pmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$h_1 = h_1(u,v)$$
$$h_2 = h_2(u,v)$$

donde $u = t^2+1$ y $v = e^t$.

Por tanto, las derivadas de h_1 y h_2 respecto de t son:

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= \frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{dv}{dt} = v2t + ue^t = e^t 2t + (t^2+1)e^t = e^t(t^2+2t+1) \\ \frac{dh_2}{dt} &= \frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial h_2}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}2t - \frac{u}{v^2}e^t = \frac{2t}{e^t} - \frac{t^2+1}{e^{2t}}e^t = \frac{2t-t^2-1}{e^t} \end{aligned}$$

La matriz jacobiana es:

$$Jh = \begin{pmatrix} e^t(t^2+2t+1) \\ e^{-t}(2t-t^2-1) \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

Ejemplo 1.28 Sea $f(t) = (t^3+1, e^{-t})$ y sea $g(u,v) = \frac{u}{v}$. Si $h = g \circ f$, calcula, aplicando la regla de la cadena, $h'(t)$.

Solución. El esquema de esta composición es:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & (\underbrace{t^3+1}_{u}, \underbrace{e^{-t}}_{v}) & \longrightarrow & \underbrace{\frac{u}{v}}_{h} \end{array}$$

En este caso la matriz jacobiana tiene dimensión 1×1; es decir, puesto que la composición h es una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, lo que en realidad se obtiene es $\frac{dh}{dt}$ ó $h'(t)$.

$$h \begin{array}{l} \nearrow \quad u \longrightarrow t \\ \searrow \quad v \longrightarrow t \end{array}$$

Por tanto,

$$h'(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{dv}{dt} = (\frac{1}{v})3t^2 + (\frac{-u}{v^2})e^{-t}(-1) =$$

(teniendo en cuenta los valores de u y v en función de t)

$$= 3t^2e^t + e^t(t^3+1) = e^t(t^3+3t^2+1). \blacktriangle$$

Ejercicio 1.12 Sea $f(u,v)=(u^2-v, \dfrac{u^2}{v}, v^2+1)$ y sea $g(x,y,z)=x^2+y^2z+z^2$. Calcula, aplicando la regla de la cadena, la matriz jacobiana de $g\circ f$.

Ejercicio 1.13 Sea $f(x,y)=(e^{xy}, \cos xy, y)$ y sea $g(u,v,w)=(2u+3v, u+w^2)$. Calcula $D(g\circ f)$ aplicando la regla de la cadena.

1.5. FUNCIONES HOMOGÉNEAS

Las funciones homogéneas son una clase de funciones que tienen importantes aplicaciones en algunos campos de la economía. Comenzaremos estudiando las funciones homogéneas de dos variables, por ser las más sencillas, para luego generalizar todo lo estudiado.

1.5.1. Funciones homogéneas de dos variables

Definición 1.9 Sea $f(x,y)$ una función escalar de dos variables definida en un dominio D. Decimos que f es una *función homogénea de grado* α, si para cualquier $(x,y)\in D$ y para todo $k>0$ se verifica

$$f(k\,x, k\,y)=k^{\alpha}\,f(x,y)$$

Es decir, si al multiplicar las dos variables por una constante positiva k, el valor de la función resulta multiplicado por k^{α}.

Evidentemente, para que la definición anterior tenga sentido, es necesario que el dominio de la función, D, verifique la siguiente propiedad:

$$\forall (x,y)\in D \text{ y } \forall k>0 \Rightarrow (k\,x, k\,y)\in D$$

Un conjunto que verifique esta propiedad se llama *cono*. En esta sección, se supondrá que los dominios de las funciones con las que trabajemos serán siempre conos.

Ejemplo 1.29 La función $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ es homogénea de grado cero, ya que para cualquier $k>0$ se tiene:

$$f(k\,x,k\,y)=\frac{(k\,x)^2-(k\,y)^2}{(k\,x)^2+(k\,y)^2}=\frac{k^2x^2-k^2y^2}{k^2x^2+k^2y^2}=\frac{k^2(x^2-y^2)}{k^2(x^2+y^2)}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k^0f(x,y).$$

Ejemplo 1.30 La función $f(x,y)=x+\dfrac{2y^2}{x}$ es una función homogénea de grado 1, ya que para cualquier $k>0$ se tiene:

$$f(k\,x,k\,y)=k\,x+\frac{2(k\,y)^2}{k\,x}=k\,x+\frac{2k^2y^2}{k\,x}=k\,x+\frac{2k\,y^2}{x}=k(x+\frac{2y^2}{x})=k^1f(x,y).$$

Ejemplo 1.31 En mucho modelos económicos aparecen funciones de dos variables de la forma $f(x,y) = Cx^p y^q$, donde C, p, q son constantes y $x \geq 0$, $y \geq 0$. Una tal función se llama *función de Cobb-Douglas* y es una función homogénea de grado $p+q$. En efecto, si $k > 0$:

$$f(k\,x, k\,y) = C\,(k\,x)^p (k\,y)^q = Ck^p x^p k^q y^q = k^{p+q} Cx^p y^q = k^{p+q} f(x,y).$$

Ejercicio 1.14 R. Frisch (Nobel de Economía en 1969) y T. Haavelmo (Nobel de Economía en 1989) realizaron un estudio sobre la demanda de leche, encontrando la relación

$$f(x,y) = C\,\frac{x^{2.08}}{y^{1.5}}$$

siendo C una constante positiva y donde $f(x,y)$ es el consumo de leche, x su precio relativo e y la renta por familia. Justifica que $f(x,y)$ es una función homogénea y calcula su grado.

Propiedades de las funciones homogéneas

Veamos a continuación algunas de las propiedades de las funciones homogéneas:

(i) Si f, g son funciones definidas sobre el mismo cono D y homogéneas de grados α y β, respectivamente, se verifican:

a) Si $\alpha = \beta$, entonces $f + g$ es homogénea de grado α.

b) λf es homogénea de grado α.

c) $f \cdot g$ es homogénea de grado $\alpha + \beta$.

d) Si $g(x,y) \neq 0$, para todo $(x,y) \in D$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es homogénea de grado $\alpha - \beta$.

(ii) Si f es una función homogénea de grado α, entonces

$$f(x,y) = x^\alpha f(1, \frac{y}{x}) = y^\alpha f(\frac{x}{y}, 1)$$

(iii) Si f es una función homogénea de grado α, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son homogéneas de grado $\alpha - 1$.

(iv) **Teorema de Euler:** $f(x,y)$ es una función homogénea de grado α si y sólo si $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x,y)$.

Ejemplo 1.32 Comprueba las tres últimas propiedades para la función $f(x, y) = 4xy^2 - x^3$, que es una función homogénea de grado 3 (¡compruébalo!).

Solución. Evidentemente, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4y^2 - 3x^2$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 8xy$, son homogéneas de grado 2, ya que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(k\,x, k\,y) = 4(k\,y)^2 - 3(k\,x)^2 = k^2(4y^2 - 3x^2) = k^2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(k\,x, k\,y) = 8(k\,x)(k\,y) = k^2 8xy = k^2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Con lo que queda comprobada la tercera propiedad.

También se tiene:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\left(4y^2 - 3x^2\right) + y\,(8xy) = 12xy^2 - 3x^3 = 3(4xy^2 - x^3) = 3f(x, y)$$

y así hemos comprobado el Teorema de Euler.

En cuanto a la segunda propiedad:

$$x^3 f(1, \frac{y}{x}) = x^3\left(4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right) = x^3 4\frac{y^2}{x^2} - x^3 = 4xy^2 - x^3 = f(x, y)$$
$$y^3 f(\frac{x}{y}, 1) = y^3\left(4\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^3\right) = 4xy^2 - y^3\frac{x^3}{y^3} = 4xy^2 - x^3 = f(x, y). \blacktriangle$$

Ejercicio 1.15 Comprueba las propiedades 2, 3 y 4 de las funciones homogéneas con las funciones de los ejemplos anteriores.

1.5.2. Funciones homogéneas generales

Las definiciones y propiedades estudiadas en la sección anterior pueden generalizarse para funciones escalares de tres o más variables. Para ello, y en lo que sigue, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ será una función definida sobre un *cono* de $\mathbb{R}^n$; es decir, sobre un conjunto tal que si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, entonces $(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) \in D$, para cualquier $k > 0$.

Definición 1.10 Decimos que una función f es *homogénea de grado* α en D si para cada $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ y para cualquier $k > 0$ se verifica:

$$f(k\,x_1, k\,x_2, \ldots, k\,x_n) = k^\alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ejemplo 1.33 La función $f(x, y, z) = \dfrac{x - y + 3z}{x^2 + y^2 + 5z^2}$ es homogénea de grado -1, ya que

$$\begin{aligned} f(k\,x, k\,y, k\,z) &= \frac{k\,x - k\,y + 3(k\,z)}{(k\,x)^2 + (k\,y)^2 + 5(k\,z)^2} = \frac{k\,(x - y + 3z)}{k^2\,(x^2 + y^2 + 5z^2)} = \\ &= \frac{1}{k}\frac{x - y + 3z}{x^2 + y^2 + 5z^2} = k^{-1} f(x, y, z). \end{aligned}$$

Ejercicio 1.16 Demuestra que las funciones que se dan a continuación son homogéneas y calcula su grado de homogeneidad:

(i) $f(x, y, z, t) = xy - 3zt$

(ii) $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$

Ejercicio 1.17 Demuestra que la función de Cobb-Douglas generalizada,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C\, x_1^{p_1} x_2^{p2} \cdots x_n^{p_n}$$

es homogénea y determina su grado de homogeneidad.

Como ya hemos indicado antes, son válidas las generalizaciones de las propiedades vistas en la sección anterior. Por su importancia como propiedad que caracteriza a las funciones homogéneas, destacamos el siguiente teorema:

Teorema 2 (Teorema de Euler) *Sea f una función de n variables con derivadas parciales continuas en un cono abierto D. Entonces f es homogénea de grado α si y sólo si para cualquier $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ se verifica la siguiente igualdad:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ejercicio 1.18 Dada la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4}$, demuestra que es homogénea y comprueba que se verifica el teorema de Euler.

Para finalizar esta sección dedicada al estudio de las funciones homogéneas, señalaremos una de sus principales aplicaciones económicas: el output de un proceso productivo viene dado por una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, en función de las cantidades $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de los n inputs que intervienen en el proceso. En numerosas ocasiones ocurre que si todas las cantidades se multiplican por un mismo factor k, el output resulta multiplicado por el mismo factor; es decir:

$$f(k\, x_1, k\, x_2, \ldots, k\, x_n) = k\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ para cualquier } k > 0$$

Ello significa que f es una función homogénea de grado 1 y en este caso decimos que la función de producción da un *rendimiento constante a escala.* En el mismo sentido, cuando una función es homogénea de grado $\alpha < 1$ decimos que da *rendimientos decrecientes a escala* y si $\alpha > 1$ que da *rendimientos crecientes a escala.*

Ejemplo 1.34 La función de Cobb-Douglas generalizada

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C\, x_1^{p_1} x_2^{p2} \cdots x_n^{p_n}$$

es una función homogénea de grado $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$, por tanto tendrá rendimientos constantes a escala cuando $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, decrecientes cuando $p_1 + p_2 + \cdots + p_n < 1$ y crecientes cuando $p_1 + p_2 + \cdots + p_n > 1$.

1.6. FUNCIONES IMPLÍCITAS

A menudo nos encontramos con funciones definidas implícitamente; es decir, con ecuaciones de la forma $f(x,y) = 0$ en las que no es fácil obtener y en función de x ni x en función de y. Una ecuación explícita que relacionara ambas variables sería de la forma $y = g(x)$ ó $x = h(y)$. Cualquiera de estas ecuaciones puede expresarse implícitamente, de manera trivial, escribiendo $G(x,y) = y - g(x) = 0$ ó $H(x,y) = x - h(y) = 0$. Lo que nos planteamos en esta sección es cuándo y bajo qué condiciones podemos encontrar una función que describa y en función de x o bien x en función de y de forma explícita, en un entorno de un punto (a,b) de la curva $f(x,y) = 0$.

Sea pues, F una función escalar de dos variables y consideremos la ecuación $F(x,y) = k$, siendo k una constante. Como ya sabemos, esta ecuación es la ecuación de una de las curvas de nivel de la función F. Si la ecuación define y como función de x de forma implícita en un cierto intervalo de $\mathbb{R}$, es decir, si $y = f(x)$ y $F(x, f(x)) = k$ para cada punto x de dicho intervalo, nos preguntamos ¿es f derivable?¿cuánto vale la derivada de f?.

El problema planteado lo resolveremos con el Teorema de la Función Implícita, que enunciaremos e ilustraremos con ejemplos. La importancia de este teorema radica en que nos ofrece la posibilidad de obtener derivadas de funciones definidas implícitamente, sin necesidad de obtener la función de forma explícita.

Teorema 3 (de la Función Implícita para funciones de dos variables) *Supongamos que $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función cuyas derivadas parciales primeras son continuas.*

Si en un punto (a,b) en el que $F(a,b) = 0$ se verifica que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$, entonces existe un entorno U de $x = a$, existe un entorno V de $y = b$ y existe una única función $f : U \longrightarrow V$ verificando:

1. $F(x, f(x)) = 0; \quad \forall x \in U.$

2. *$f(x)$ es derivable y su derivada es continua.*

3. $y' = f'(x) = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(x,y); \quad \forall x \in U$ *y* $\forall y = f(x) \in V.$

Ejemplo 1.35 Veamos cómo podemos aplicar el teorema anterior si tenemos la ecuación $x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 = 0$, para calcular $y'(x)$ en los puntos en los que sea posible.

Solución. Consideremos la función $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2$, que evidentemente es continua y tiene derivadas parciales primeras continuas por ser una función polinómica. Por otra parte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 3x^2 - 6x \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 3y^2 + 6y \end{aligned}$$

Por tanto, en los puntos (a,b) que verifiquen $F(a,b)=0$ y para los que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)=3b^2+6b\neq 0$, podemos asegurar que la ecuación $x^3+y^3-3x^2+3y^2=0$, define y como función de x de forma implícita y se verifica:

$$y'=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}=-\frac{3x^2-6x}{3y^2+6y}=-\frac{x^2-2x}{y^2+2y}. \ \blacktriangle$$

De forma más general nos preguntamos cuándo una ecuación de la forma

$$F(x_1,\ldots,x_n)=c \tag{1.1}$$

define a una de las variables, por ejemplo x_k, como función implícita de las demás. O, cuándo un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n)=c_1 \\ \qquad\vdots \\ F_m(x_1,\ldots,x_n)=c_m \end{cases}$$

permite establecer una relación funcional de la forma

$$\begin{cases} x_1=f_1(x_{m+1},\ldots,x_n) \\ \qquad\vdots \\ x_m=f_m(x_{m+1},\ldots,x_n) \end{cases}$$

Teorema 4 (de la Función Implícita general para una ecuación) *Sea la función $F:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ y sea $(a_1,\ldots,a_n)$ un punto de su dominio en el que se verifican:*

(i) *$F(a_1,\ldots,a_n)=c$; es decir, el punto $(a_1,\ldots,a_n)$ verifica la ecuación (1.1).*

(ii) *La función F y sus derivadas parciales primeras son continuas en un entorno del punto $(a_1,\ldots,a_n)$.*

(iii) *$\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(a_1,\ldots,a_n)\neq 0$; es decir, la derivada parcial primera de la función, respecto de la variable dependiente x_k, no se anula en el punto $(a_1,\ldots,a_n)$.*

Bajo estas condiciones la ecuación $F(a_1,\ldots,a_n)=c$ define implícitamente a la variable x_k como función implícita de las demás variables en un entorno del punto $(a_1,\ldots,a_n)$.

Es decir, existe un entorno U de $(a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n)$ y existe una función $f:U\subseteq\mathbb{R}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}$ tales que:

1. $f(a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n)=a_k$.

2. $F(x_1, \ldots, x_{k-1}, \underbrace{f(x_1, \ldots, x_{k-1},\ x_{k+1}, \ldots, x_n)}_{x_k}, x_{k+1}, \ldots, x_n) = c$, *para cualquier* $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in U$.

3. $\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i}(b) = -\dfrac{\partial F/\partial x_i(b)}{\partial F/\partial x_k(b)}$, *para cualquier* $i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ *y para cualquier* $b \in U$.

Ejemplo 1.36 Una empresa produce un bien empleando dos materias primas. La relación entre la cantidad del bien producido, C, y las cantidades de las materias primas empleadas (x, y) viene dada por la ecuación

$$\ln C - \frac{x^2 y}{C} + 1 = 0 \qquad (1.2)$$

Por otra parte, sabemos que para obtener una unidad del bien producido, debemos emplear una unidad de cada una de las materias primas necesarias para su fabricación.

Veamos que esta relación, bajo la condición establecida, define implícitamente la cantidad producida en función de las cantidades de materias primas.

Solución. Consideremos la función $F(C, x, y) = \ln C - \dfrac{x^2 y}{C} + 1$ y veamos que verifica las hipótesis del Teorema de la Función Implícita en un entorno del punto $(1, 1, 1)$.

(i) $F(1, 1, 1) = 0$.

(ii) La función F es continua y también lo son sus derivadas parciales primeras en cualquier punto que verifique $C, x, y > 0$.

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial C} = \dfrac{1}{C} + \dfrac{x^2 y}{C^2} \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial C}(1, 1, 1) = 2 \neq 0$.

Por tanto, la relación (1.2) define la cantidad producida C como función implícita de las cantidades de materias primas empleadas (x, y). Es decir, existe un entorno U del punto $(1, 1)$ y existe una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que:

1. $f(1, 1) = 1$.
2. $f(f(x, y), x, y) = 0$, para cualquier punto $(x, y) \in U$.
3. Podemos obtener las productividades marginales respecto a cada una de las variables x e y:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial C}} = -\frac{-\dfrac{2xy}{C}}{\dfrac{1}{C} + \dfrac{x^2 y}{C^2}} = \frac{2Cxy}{C + x^2 y} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x}(1, 1) = 1$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial C}} = -\frac{-\dfrac{x^2}{C}}{\dfrac{1}{C} + \dfrac{x^2 y}{C^2}} = \frac{Cx^2}{C + x^2 y} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{2}. \ \blacktriangle$$

Finalmente, enunciaremos el teroema en su forma más general, aunque en la práctica sólo lo utilizaremos para funciones de tres o cuatro variables.

Teorema 5 (Teorema de la Función Implícita) *Sea $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con $n > m$, una función vectorial de componentes $(F_1, \ldots, F_m)$ y sea $(a_1, \ldots, a_n)$ un punto de su dominio en el que se verifican:*

(i)

$$\begin{cases} F_1(a_1, \ldots, a_n) = c_1 \\ \vdots \\ F_m(a_1, \ldots, a_n) = c_m \end{cases} \tag{1.3}$$

(ii) La función F y sus derivadas parciales primeras son continuas en un entorno del punto $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

(iii) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_m}(a) \end{vmatrix} \neq 0$

Bajo estas condiciones podemos asegurar que el sistema de ecuaciones (1.3) define implícitamente a las variables $x_1, \ldots, x_m$ como funciones implícitas de las demás variables, $x_{m+1}, \ldots, x_n$, en un entorno del punto $(a_1, \ldots, a_n)$.

Es decir, existe un entorno U de $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$ y existe una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, continua y con derivadas parciales primeras continuas, de componentes $(f_1, \ldots, f_m)$ tales que:

1. $f(a_{m+1}, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_m)$.
2. $F(f_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \underbrace{f_m(x_{m+1}, \ldots, x_n)}_{x_k}, x_{m+1}, \ldots, x_n) = (c_1, \ldots, c_m)$,

   para cualquier $(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in U$.

El teorema, como sus casos particulares anteriores, no nos da la forma explícita de las variables $x_1, \ldots, x_m$ en función de las variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$, ni la forma de las derivadas. Éstas las obtendremos mediante derivación de las ecuaciones y aplicación de la regla de la cadena, como veremos en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 1.37 Sean p_A y p_B los precios de dos bienes A y B cuyas demandas respectivas son x_A y x_B. Se ha observado empíricamente la existencia de las siguientes relaciones entre las cuatro magnitudes:

$$\begin{aligned} x_A^2 + x_A x_B - p_A - p_B = 2 \\ -x_A - x_B^2 + p_A + p_B = 1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Cuando los precios son $p_A = 2$ y $p_B = 2$, las cantidades demandadas resultan ser $x_A = 2$ y $x_B = 1$. Bajo estas condiciones, la demanda resulta ser función de

los precios en un entorno de estos valores, puesto que la función $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x_A, x_B, p_A, p_B) = (x_A^2 + x_A x_B - p_A - p_B, -x_A - x_B^2 + p_A + p_B)$$

verifica las tres hipótesis del teorema, como veremos a continuación:

(i) $F(2, 1, 2, 2) = (2, 1)$.

(ii) F es continua y todas sus derivadas de cualquier orden lo son, por ser sus componentes funciones polinómicas.

(iii) $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_A} = 2x_A + x_B$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_B} = x_A$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial x_A} = -1$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial x_B} = -2x_B$. Por tanto

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_A}(2,1,2,2) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_B}(2,1,2,2) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_A}(2,1,2,2) & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_B}(2,1,2,2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0. \qquad (1.5)$$

Si ahora derivamos las ecuaciones (1.4) con respecto a p_A, aplicando la regla de la cadena, puesto que x_A y x_B son funciones de los precios, es decir $x_A = x_A(p_A, p_B)$ y $x_B = x_B(p_A, p_B)$ obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_A \dfrac{\partial x_A}{\partial p_A} + x_B \dfrac{\partial x_A}{\partial p_A} + x_A \dfrac{\partial x_B}{\partial p_A} - 1 = 0 \\ \\ -\dfrac{\partial x_A}{\partial p_A} - 2x_B \dfrac{\partial x_B}{\partial p_A} + 1 = 0 \end{array} \right.$$

y si ahora particularizamos en el punto $(x_A, x_B, p_A, p_B) = (2, 1, 2, 2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5\dfrac{\partial x_A}{\partial p_A}(2,2) + 2\dfrac{\partial x_B}{\partial p_A}(2,2) = 1 \\ \\ -\dfrac{\partial x_A}{\partial p_A}(2,2) - 2\dfrac{\partial x_B}{\partial p_A}(2,2) = -1 \end{array} \right.$$

Observemos que éste es un sistema de Cramer, pues tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (que son $\dfrac{\partial x_A}{\partial p_A}(2,2)$ y $\dfrac{\partial x_B}{\partial p_A}(2,2)$) y el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero (es el que hemos calculado en (1.5)). Por tanto, aplicando la Regla de Cramer, obtenemos:

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A}(2,2) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = 0, \qquad \frac{\partial x_B}{\partial p_A}(2,2) = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}.$$

Del mismo modo, empezando por derivar las ecuaciones de (1.4) con respecto a p_B, calcularíamos $\dfrac{\partial x_A}{\partial p_A}(2,2)$ y $\dfrac{\partial x_B}{\partial p_A}(2,2)$.

Ejercicio 1.19 Calcula $\dfrac{\partial x_A}{\partial p_A}(2,2)$ y $\dfrac{\partial x_B}{\partial p_A}(2,2)$ del ejemplo anterior.

Ejemplo 1.38 Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+3x^2z+y^3z^3=5 \\ 2xz+3x^2y-2y^2z=3 \end{array}\right. \tag{1.6}$$

veamos que define implícitamente a y y a z como funciones de x, $y=f(x)$ y $z=g(x)$, en un entorno de $x=1$ de manera que $f(1)=1$ y $g(1)=1$.

Solución. Para ello, y para usar la misma notación que en el enunciado del Teorema de la Función Implícita, sea

$$F(x,y,z)=(x^2+3x^2z+y^3z^3, 2xz+3x^2y-2y^2z)$$

(i) Al sustituir (x,y,z) por $(1,1,1)$ en el sistema (1.6), las ecuaciones se transforman en identidades; es decir, $F(1,1,1)=(5,3)$.

(ii) F es continua y todas sus derivadas de cualquier orden lo son, por ser sus componentes funciones polinómicas.

(iii) $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}=3y^2z^3$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial z}=3x^2+3y^3z^2$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial y}=3x^2-4yz$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial z}=2x-2y^2$.
Por tanto

$$\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(1,1,1) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(1,1,1) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ -1 & 0 \end{array}\right| = 6 \neq 0. \tag{1.7}$$

Con ello hemos comprobado que se verifican las hipótesis del teorema y, por tanto, que el sistema (1.6) define implícitamente a y y a z como funciones de x. Sean estas funciones $y=f(x)$ y $z=g(x)$.

Derivando ambas ecuaciones con respecto a x, aplicando la regla de la cadena pues tanto y como z son funciones de x, se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+6xg(x)+3x^2g'(x)+3f^2(x)f'(x)g^3(x)+3f^3(x)g^2(x)g'(x)=0 \\ 2g(x)+2xg'(x)+6xf(x)+3x^2f'(x)-4f(x)f'(x)g(x)-2f^2(x)g'(x)=0 \end{array}\right. \tag{1.8}$$

de donde, particularizando en el punto $(1,f(1),g(1))=(1,1,1)$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2+6+3g'(1)+3f'(1)+3g'(1)=0 \\ 2+2g'(1)+6+3f'(1)-4f'(1)-2g'(1)=0 \end{array}\right.$$

es decir, obtenemos el sistema de Cramer

$$\left\{\begin{array}{lcrcr} 3f'(1) & + & 6g'(1) & = & -8 \\ -f'(1) & & & = & -8 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema se tiene: $f'(1)=8$ y $g'(1)=-\dfrac{16}{3}$. ▲

Ejercicio 1.20 Resuelve las dos cuestiones siguientes referentes al ejemplo anterior:

(a) Justifica que el último sistema es de Cramer.

(b) Calcula $f''(1)$ y $g''(1)$. (Sugerencia: deriva con respecto a x las dos ecuaciones del sistema (1.8) y procede después como en el ejemplo).

1.7. EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición 1.11 Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que en el punto $(a, b) \in D$ hay un *máximo relativo o local* de f si para todos los puntos de un cierto entorno $E(a, b)$ se verifica que $f(a, b) \geq f(x, y)$; es decir:

$$\exists\, E(a, b) \subset D \,/\, \forall (x, y) \in E(a, b) \Rightarrow f(a, b) \geq f(x, y)$$

Diremos que el máximo es estricto si $f(a, b) > f(x, y)$ *para cada punto del entorno.*

Definición 1.12 Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que en el punto $(a, b) \in D$ hay un *mínimo relativo o local* de f si para todos los puntos de un cierto entorno $E(a, b)$ se verifica que $f(a, b) \leq f(x, y)$; es decir:

$$\exists\, E(a, b) \subset D \,/\, \forall (x, y) \in E(a, b) \Rightarrow f(a, b) \leq f(x, y)$$

Diremos que el mínimo es *estricto* si $f(a, b) < f(x, y)$ *para cada punto del entorno.*

Llamaremos extremos locales a los máximos y mínimos relativos de una función.

Definición 1.13 Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que en el punto $(a, b) \in D$ hay un *máximo absoluto* si en dicho punto la función toma el mayor valor; es decir, si

$$f(a, b) \geq f(x, y),\ \forall (x, y) \in D$$

Diremos que el máximo absoluto es *estricto* si $f(a, b) > f(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$.

Definición 1.14 Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$.Se dice que en el punto $(a, b) \in D$ hay un *mínimo absoluto* si en dicho punto la función toma el menor valor; es decir, si

$$f(a, b) \leq f(x, y),\ \forall (x, y) \in D$$

Diremos que el mínimo absoluto es *estricto* si $f(a, b) < f(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$.

1.7.1. Condición necesaria de extremo

Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables.

Si en un punto (a, b) hay un extremo local, entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \end{cases}$$

Esta condición es necesaria pero no suficiente. Existen puntos que verifican esta condición y no son ni máximos ni mínimos locales, son los llamados *puntos de silla*.

Por tanto, para hallar los extremos de una función debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Los puntos obtenidos se llaman *puntos críticos* y pueden ser máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

En general, dada una función de n variables, $f(x_1, ..., x_n)$, resolveremos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x,y) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x,y) = 0 \end{cases}$$

para hallar los puntos críticos.

1.7.2. Condición suficiente de extremo local

Para saber si un punto crítico es máximo, mínimo o punto de silla, debemos hacer un estudio de los signos de las derivadas segundas de la función sustituida en dicho punto.

Definición 1.15 Dada una función de n variables, $f(x_1, ..., x_n)$, se llama *matriz hessiana* de f a la matriz:

$$Hf(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Estudiamos el signo de la matriz hessiana basándonos en el método de Jacobi.

Definición 1.16 Dada una matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

llamamos *menores principales conducentes* a los menores:

$$\begin{aligned} H_1 &= a_{11} \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ H_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ H_n &= |A| \end{aligned}$$

Para clasificar un punto crítico $P = (a_1, ..., a_n)$ de una función f, sustituimos dicho punto en la matriz hessiana. Si $|Hf(P)| \neq 0$, entonces:

- Si $H_1 > 0,\ H_2 > 0, ..., H_n > 0$, en P hay un mínimo local estricto.
- Si $H_1 < 0,\ H_2 > 0, ..., (-1)^k H_k > 0, ...$, en P hay un máximo local estricto.
- Si ocurre cualquier otra combinación de signos, en P hay un punto de silla.

Ejemplo 1.39 Halla y clasifica los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$$

Solución. Como se ha visto tenemos que hallar los puntos solución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3y - 3x^2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación despejamos $y = x^2$ y sustituyendo en la segunda obtenemos

$$x - x^4 = 0$$

de donde se tiene que $x = 0$ ó $x = 1$. Por tanto, hay dos puntos críticos: $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Para clasificarlos construimos la matriz hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de Jacobi a la matriz hessiana de cada punto. Para el punto $(0,0)$ se tiene:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La secuencia que tenemos es $H_1 = 0$, $H_2 = -9 < 0$, por tanto, $Hf(0,0)$ es una matriz indefinida y $(0,0)$ es un punto de silla.

Para el punto $(1,1)$ tenemos:

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

La secuencia que tenemos es $H_1 = -6 < 0$, $H_2 = 36 - 9 > 0$, por tanto, $Hf(1,1)$ es una matriz definida negativa y el punto $(1,1)$ es un máximo local estricto. ▲

Ejemplo 1.40 Halla y clasifica los puntos críticos de la función:

$$f(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2 + 2xy + 2yz + 1.$$

Solución. Hallamos los puntos solución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -4x + 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2y + 2x + 2z = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -6z + 2y = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, por tanto tenemos un único punto crítico: $P = (0,0,0)$.

Para clasificarlo construimos la matriz hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo el punto P queda la misma matriz. La secuencia de menores conducentes es

$$H_1 = -4 < 0,\ H_2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 4 > 0,\ H_3 = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

por tanto, es una matriz definida negativa y el punto $(0,0,0)$ es un máximo local estricto. ▲

Ejercicio 1.21 Halla y clasifica los puntos críticos de la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$$

Ejercicio 1.22 Halla y clasifica los puntos críticos de la función:

$$f(x, y) = x^3 - xy + y^3$$

1.8. EXTREMOS CONDICIONADOS

Dada una función de dos variables $f(x, y)$, queremos hallar los puntos críticos de f sujetos a una condición $h(x, y) = 0$. El procedimiento que vamos a utilizar para resolver este tipo de problemas es el *método de los multiplicadores de Lagrange.*

Para ello construimos la siguiente función:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, h(x, y)$$

llamada *función lagrangiana.*

Los extremos libres de la función L son los extremos condicionados de la función f; por ello, éstos se obtendrán al resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

En general, supongamos que dada una función de n variables $f(x_1, ..., x_n)$, queremos optimizar la función f sujeta a p restricciones dadas por las ecuaciones:

$$\begin{cases} h_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \qquad\vdots \\ h_p(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

En este caso, comenzaremos comprobando cuántas ecuaciones hay funcionalmente independientes y eliminaremos aquéllas que sean dependientes del resto. Si el rango de la matriz Jacobiana

$$Jh = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

es m, tomaremos m ecuaciones independientes y construiremos la función lagrangiana:

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \lambda_1 h_1(x_1, ..., x_n) + ... + \lambda_m h_m(x_1, ..., x_n)$$

Para hallar los puntos críticos resolveremos el sistema de $n+m$ ecuaciones y $n+m$ incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}=0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m}=0 \end{array}\right.$$

Observemos que $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}=h_i(x_1,...,x_n),\ i=1,...,m.$

Veamos cómo clasificar los puntos críticos obtenidos.

Construimos, la *matriz hessiana orlada,* que es la matriz de las derivadas segundas de la función L :

$$HL=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial \lambda_m} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_m \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_m \partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_m^2} \end{pmatrix}$$

Puesto que $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}=h_i$, se tiene que $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda_i \partial x_j}=\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}$. Además, se tiene que $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}=0,\ \forall i,j$. Por tanto, podemos expresar la matriz anterior de forma abreviada:

$$HL=\begin{pmatrix} HL_x & Jh^T \\ Jh & 0_{m\times m} \end{pmatrix}$$

donde HL_x representa el bloque de las derivadas segundas de L respecto de las variables $x_1,...,x_n$; $0_{m\times m}$ representa un bloque de tamaño $m\times m$ formado por ceros y Jh es la matriz jacobiana de las m restricciones independientes.

A continuación, sustutimos en HL el punto crítico que queremos clasificar obteniendo una matriz formada por constantes.

Comprobamos si para dicho punto dado, la matriz formada por el bloque HL_x es definida positiva, en ese caso en el punto hay un mínimo del problema condicionado. Si HL_x es definida negativa, en dicho punto hay un máximo del problema condicionado.

En otro caso, no podemos deducir nada y procederemos a utilizar un método de clasificación que podemos aplicar independientemente del estudio de HL_x. Este método consiste en resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} HL_x - \alpha I_n & Jh^T \\ Jh & 0_{m\times m} \end{vmatrix} = 0$$

despejando α. Entonces:

- Si todos los valores de α obtenidos son positivos, el punto crítico corresponde a un *mínimo* del problema condicionado.
- Si todos los valores de α obtenidos son negativos, el punto crítico corresponde a un *máximo* del problema condicionado.
- En otro caso, no podemos clasificar el punto crítico.

Ejemplo 1.41 Optimiza la función $f(x, y, z) = 2x+2y+z$ sujeta a las condiciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ \ln(x^2 + y^2 + z^2) &= 0 \end{aligned}$$

Solución. Observamos que el rango de la matriz

$$Jh = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}$$

es 1, por ello el problema planteado se reduce a optimizar la función f sujeta a una de estas dos condiciones. Tomaremos la más sencilla.

Construimos la función lagrangiana:

$$L(x, y, z, \lambda) = 2x + 2y + z + \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial z} = 1 + 2\lambda z = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación podemos despejar x en función de λ:

$$x = \frac{-1}{\lambda},$$

de la segunda ecuación despejamos y en función de λ:

$$y = \frac{-1}{\lambda}$$

y de la tercera ecuación despejamos z en función de λ:

$$z = \frac{-1}{2\lambda}$$

para sustituir los tres valores en la cuarta ecuación, entonces:

$$\left(\frac{-1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

de donde

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \to \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \to 9 = 4\lambda^2 \to \lambda^2 = \frac{9}{4} \to \lambda = \pm\frac{3}{2}$$

Si $\lambda = \frac{-3}{2}$, entonces $x = \frac{-1}{\lambda} = \frac{2}{3}$, $y = \frac{-1}{\lambda} = \frac{2}{3}$ y $z = \frac{-1}{2\lambda} = \frac{1}{3}$.
Si $\lambda = \frac{3}{2}$, entonces $x = \frac{-1}{\lambda} = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{-1}{\lambda} = -\frac{2}{3}$ y $z = \frac{-1}{2\lambda} = -\frac{1}{3}$.

Por tanto, obtenemos los puntos críticos:

$$P = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \text{ para } \lambda = \frac{-3}{2}$$

y

$$Q = (\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}) \text{ para } \lambda = \frac{3}{2}$$

Construimos ahora la matriz hessiana orlada:

$$HL = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 2\lambda & 2z \\ 2x & 2y & 2z & 0 \end{pmatrix}$$

Para clasificar el punto P lo sustituimos en la hessiana orlada:

$$HL(P) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & -3 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -3 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que

$$HL_x(P) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

es una matriz definida negativa, deducimos que en P hay un máximo.

Clasificamos ahora el punto Q:

$$HL(Q) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que

$$HL_x(Q) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es una matriz definida positiva, deducimos que en Q hay un mínimo.

También podíamos haber clasificado los puntos siguiendo el procedimiento general.

Para el punto P, las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} -3-\alpha & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & -3-\alpha & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -3-\alpha & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = -4\alpha^2 - 24\alpha - 36 = 0$$

son $\alpha_1 = -3$ y $\alpha_2 = -3$. Como ambas son negativas, en el punto P hay un máximo.

Para el punto Q, las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 3-\alpha & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 3-\alpha & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = -4\alpha^2 + 24\alpha - 36 = 0$$

son $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 3$. Como ambas son positivas, en el punto Q hay un mínimo.
▲

Ejemplo 1.42 Una empresa fabrica dos productos en cantidades x e y que vende a los precios:

$$p_x = 30 - \frac{x}{4} \qquad y \qquad p_y = 50 - \frac{y}{2} + x,$$

respectivamente.

Su función de costes totales es:

$$C(x, y) = \frac{x^2}{4} - x + \frac{y^2}{2} - 4y + 2xy$$

Si el total de la producción ha de ser 30 unidades, halla las cantidades que hay que fabricar de cada producto para que el beneficio obtenido sea máximo y da el valor de dicho beneficio.

Solución. El problema consiste en optimizar la función de beneficios sujeta a la condición:

$$x + y = 30$$

Calculemos la función de beneficios B :

$$B = I - C$$

donde I es la función de ingresos y C la función de costes. Por tanto,

$$\begin{aligned}
B(x,y) &= (xp_x + yp_y) - C(x,y) \\
&= x(30 - \frac{x}{4}) + y(50 - \frac{y}{2} + x) - (\frac{x^2}{4} - x + \frac{y^2}{2} - 4y + 2xy) \\
&= 30x - \frac{x^2}{4} + 50y - \frac{y^2}{2} + xy - \frac{x^2}{4} + x - \frac{y^2}{2} + 4y - 2xy \\
&= -\frac{x^2}{2} - y^2 + 31x + 54y - xy
\end{aligned}$$

Construimos la función lagrangiana:

$$L(x,y,\lambda) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + 31x + 54y - xy + \lambda\,(x + y - 30)$$

y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x} = -x + 31 - y + \lambda = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial y} = -2y + 54 - x + \lambda = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 30 = 0
\end{cases}$$

La solución de este sistema lineal es $x = 7$, $y = 23$, $\lambda = -1$.
Luego tenemos un punto crítico:

$$P = (7, 23) \text{ con } \lambda = -1.$$

Para comprobar que se trata de un máximo, construimos ahora la hessiana orlada:

$$HL(P) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos si podemos clasificar el punto aplicando el método de Jacobi a la matriz:

$$HL_x(P) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como la secuencia de los signos de los menores conducentes es

$$H_1 = -1 < 0,\ H_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

podemos deducir que en P hay un máximo. El valor del beneficio obtenido se obtiene sustituyendo las cantidades obtenidas en la función B :

$$B(7,23) = -\frac{7^2}{2} - 23^2 + 31 \cdot 7 + 54 \cdot 23 - 7 \cdot 23 = 744.5 \ \blacktriangle$$

Ejemplo 1.43 Los beneficios de una empresa que fabrica tres productos A, B y C en cantidades x, y y z, respectivamente, vienen determinados por la función:

$$B(x,y,z) = 2xy + 2yz + 20x - x^2 - y^2$$

Si la empresa sólo puede sacar al mercado un total de 180 unidades, calcula qué cantidad debe producir de cada producto para que los beneficios sean máximos.

Solución. El problema consiste en optimizar la función B sujeta a la condición:

$$x + y + z = 180$$

Para ello, construimos la función lagrangiana:

$$L(x,y,z,\lambda) = 2xy + 2yz + 20x - x^2 - y^2 + \lambda\,(x + y + z - 180)$$

y resolvemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2y + 20 + -2x + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2x + 2z - 2y + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2y + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - 180 = 0 \end{array}\right.$$

cuya solución es $x = 10$, $y = 60$, $z = 110$, $\lambda = -120$.

Luego tenemos un punto crítico:

$$P = (10, 60, 110) \text{ con } \lambda = -120.$$

Para comprobar que se trata de un máximo, construimos ahora la hessiana orlada:

$$HL(P) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos si podemos clasificar el punto aplicando el método de Jacobi a la matriz:

$$HL_x(P) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la secuencia de los signos de los menores conducentes es

$$H_1 = -2 < 0,\ H_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,\ H_3 > 0$$

no podemos deducir nada de la clasificación de P; por ello, buscamos las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} -2-\alpha & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2-\alpha & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos:

$$-3\alpha^2 - 16\alpha - 12 = 0$$

cuyas soluciones son $\alpha_1 = \frac{-8-2\sqrt{7}}{3}$ y $\alpha_2 = \frac{-8+2\sqrt{7}}{3}$.

Como α_1 y α_2 son negativas, en el punto P hay un máximo. Es decir, para que los beneficios obtenidos sean máximos, las cantidades que la empresa deberá fabricar son 10 unidades del producto A, 60 del producto B y 110 del producto C. ▲

Ejercicio 1.23 Los ingresos de una empresa que fabrica tres productos A, B y C en cantidades x, y y z, respectivamente, vienen determinados por la función:

$$I(x, y, z) = 2xy + 3yz + xz + x^2 + z^2$$

siendo la función de costes:

$$C(x, y, z) = x^2 + z^2 + xy + 2yz$$

Si la empresa sólo puede sacar al mercado un total de 600 unidades, calcula qué cantidad debe producir de cada producto para que los beneficios sean máximos.

Ejercicio 1.24 Una empresa fabrica tres tipos de grúas, siendo las cantidades producidas al mes: x, y y z. Los costes de producción en función del número de cada tipo de grúa fabricada vienen dados por la función:

$$C(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 12x - 8y + z^2 - 6z + 300$$

(a) Calcula los valores de x, y y z para que los costes de producción sean mínimos.

(b) Si el número máximo de grúas que se pueden vender al mes es 16, calcula ahora el número de grúas que se deben fabricar de cada tipo para que los costes sean mínimos.

TEMA 2

INTEGRACIÓN

2.1. CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Definición 2.1 Decimos que la función $F(x)$ es una *primitiva* de la función $f(x)$ en el intervalo $]a, b[$, si $F'(x) = f(x)$, para cada $x \in\ ]a, b[$.

Nota. En el contexto del cálculo de primitivas, cuando no se especifica el intervalo en que una función es primitiva de otra, entenderemos que es en el mayor intervalo posible donde tienen sentido ambas funciones.

Ejemplo 2.1

a) La función $F(x) = x^2$ es una primitiva de la función $f(x) = 2x$.

b) La función $F(x) = \sin x$ es una primitiva de la función $f(x) = \cos x$.

c) La función $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$ es una primitiva de la función $f(x) = e^{2x+1}$.

d) La función $F(x) = \ln(x^2 + 1)$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Pero también son primitivas de f las funciones: $G(x) = \ln(x^2 + 1) + 7$, $H(x) = \ln(x^2 + 1) - 13$, etc.

Como hemos visto en el apartado d) del ejemplo anterior, si una función tiene una primitiva tiene infinitas; es decir, si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$, entonces $F(x)+C$, siendo C un número real cualquiera, también es una primitiva de $f(x)$.

Ejercicio 2.1 Demuestra la afirmación anterior.

Definición 2.2 Dada una función $f(x)$, llamamos *integral indefinida* de $f(x)$ al conjunto de todas las primitivas de $f(x)$. Lo representartemos

$$\int f(x)\, dx$$

Así, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, escribiremos:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

Ejemplo 2.2

$$\text{a)} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$\text{b)} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C.$$

$$\text{c)} \int \sin x = -\cos x + C.$$

Ejercicio 2.2 Justifica las tres igualdades del ejemplo anterior.

2.1.1. Propiedades de la integral indefinida

i) $\displaystyle\int f'(x)dx = f(x) + C.$

Ejemplo 2.3

$$\int (x^3)' dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

ii) $\displaystyle\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

Ejemplo 2.4

$$\left(\int \cos(3x)dx\right)' = \left(\tfrac{1}{3}\sin(3x) + C\right)' = \tfrac{1}{3} 3\cos(3x) + 0 = \cos(3x).$$

iii) $\displaystyle\int \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Ejemplo 2.5

$$\int (x + e^{-3x})dx = \int xdx + \int e^{-3x}dx = \frac{x^2}{2} + C_1 + \frac{1}{-3}e^{-3x} + C_2 =$$
$$= \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{1}{3}e^{-3x} + C.$$

iv) $\displaystyle\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$

Ejemplo 2.6

$$\int 6\sin(2x)dx = 6\int \sin(2x)dx = 6\frac{-1}{2}\cos(2x) + C = -3\cos(2x) + C.$$

Las dos últimas propiedades constituyen la propiedad de linealidad de la integral.

Ejercicio 2.3 Demuestra las propiedades 3 y 4.

2.1.2. Integrales inmediatas

Los métodos de integración que veremos en la siguiente sección se basan en transformaciones que efectuamos sobre la integral que queremos calcular con el fin de transformarla en la integral de una función elemental sencilla, que es conocida de antemano. Necesitamos, pues, una lista de estas "integrales conocidas", son las llamadas integrales inmediatas. Nosotros hemos elegido las que aparecen a continuación.

i) $\displaystyle\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad \forall n \in \mathbb{R} - \{-1\}.$

ii) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$

iii) $\displaystyle\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C. \ \forall a > 0, \quad a \neq 1.$

En particular, $\displaystyle\int e^{f(x)} f'(x) = e^{f(x)} + C.$

iv) $\displaystyle\int \cos(f(x)) f'(x) = \sin((f(x)) + C.$

v) $\displaystyle\int \sin(f(x)) f'(x) = -\cos((f(x)) + C.$

vi) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \tan(f(x)) + C.$

vii) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}dx = -\cot(f(x)) + C.$

viii) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}dx = \arcsin(f(x)) + C.$

ix) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}dx = \arctan(f(x)) + C.$

x) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2 + a^2}}dx = \ln\left|f(x) + \sqrt{f(x)^2 + a^2}\right| + C.$

2.1.3. Métodos de integración

Integración por partes

El método de integración por partes consiste en aplicar la siguiente igualdad

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (2.1)$$

para el cálculo de primitivas de ciertos tipos de funciones, algunos de los cuales veremos a continuación.

En la integral inicial, se le llama u a una parte y dv al resto, con la única restricción de que la parte a la que llamamos dv debe contener a dx. A partir de u, por derivación, obtendremos du y a partir de dv, por integración, obtendremos v y ya estaremos en condiciones de aplicar la fórmula.

Trataremos de elegir las partes de forma que u sea sencilla de derivar y dv sencilla de integrar y, por supuesto, que la nueva integral que aparece en el segundo miembro de la fórmula, sea más sencilla que la que teníamos originalmente.

Integrales de la forma $\int p(x)e^{ax+b}dx$, donde $p(x)$ es una función polinómica.

En este caso hacemos:

$$\begin{array}{lcl} u = p(x) & \Rightarrow & du = p'(x)\,dx \\ dv = e^{ax+b}\,dx & \Rightarrow & v = \frac{1}{a}e^{ax+b} \end{array}$$

Ejemplo 2.7 Calcula $\int (3x-5)e^x dx$.

Solución. En este caso las partes son:

$$\begin{array}{lcl} u = 3x-5 & \Rightarrow & du = 3\,dx \\ dv = e^x\,dx & \Rightarrow & v = e^x \end{array}$$

Aplicando la fórmula (2.1) tenemos:

$$\int (3x-5)e^x dx = (3x-5)e^x - \int 3e^x dx = (3x-5)e^x - 3e^x + C = (3x-8)e^x + C. \blacktriangle$$

Integrales de la forma $\int p(x)\sin(ax+b)dx$ ó $\int p(x)\cos(ax+b)dx$, donde $p(x)$ es una función polinómica.

De forma análoga al caso anterior:

$$\begin{array}{lcl} u = p(x) & \Rightarrow & du = p'(x)\,dx \\ dv = \sin(ax+b)\,dx & \Rightarrow & v = -\frac{1}{a}\cos(ax+b), \text{ ó} \\ dv = \cos(ax+b)\,dx & \Rightarrow & v = \frac{1}{a}\sin(ax+b) \end{array}$$

Ejemplo 2.8 Calcula $\int (x^2 - 3x + 1)\cos(5x-2)dx$.

Solución. En este caso las partes son:

$$\begin{array}{lcl} u = x^2 - 3x + 1 & \Rightarrow & du = (2x-3)\ dx \\ dv = \cos(5x-2)\,dx & \Rightarrow & v = \frac{1}{5}\sin(5x-2) \end{array}$$

Aplicando la fórmula (2.1) tenemos:

$$\int (x^2-3x+1)\cos(5x-2)dx = \frac{x^2-3x+1}{5}\sin(5x-2) - \frac{1}{5}\int (2x-3)\sin(5x-2)dx \tag{2.2}$$

La integral del segundo miembro es del mismo tipo que la inicial, pero más sencilla, porque al aplicar la integración por partes hemos reducido en una unidad el grado del polinomio del integrando. Para resolver esta segunda integral hacemos las partes:

$$\begin{array}{lcl} u = 2x - 3 & \Rightarrow & du = 2\,dx \\ dv = \sin(5x-2)\,dx & \Rightarrow & v = -\frac{1}{5}\cos(5x-2) \end{array}$$

de donde, sustituyendo en (2.2):

$$\int (x^2-3x+1)\cos(5x-2)dx =$$

$$= \frac{x^2-3x+1}{5}\sin(5x-2) - \frac{1}{5}\left(-\frac{2x-3}{5}\cos(5x-2) - \frac{-2}{5}\int \cos(5x-2)dx\right) =$$

$$= \frac{x^2-3x+1}{5}\sin(5x-2) + \frac{2x-3}{25}\cos(5x-2) - \frac{2}{25}\frac{1}{5}\sin(5x-2) + C =$$

$$= \frac{25x^2-75x+23}{125}\sin(5x-2) + \frac{2x-3}{25}\cos(5x-2) + C. \ \blacktriangle$$

Integrales de la forma $\int e^{\alpha x+\beta}\sin(ax+b)dx$ **ó** $\int e^{\alpha x+\beta}\cos(ax+b)dx$**.**
En este caso hacemos:

$$\begin{array}{lcl} u = \sin(ax+b) & \Rightarrow & du = a\cos(ax+b)\,dx, \text{ ó} \\ u = \cos(ax+b) & \Rightarrow & du = -a\sin(ax+b)\,dx \\ dv = e^{\alpha x+\beta}\,dx & \Rightarrow & v = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta} \end{array}$$

Ejemplo 2.9 Calcula $\int \sin x\ e^{2x}\,dx$.

Solución. En este caso las partes son:

$$\begin{array}{lcl} u = \sin x & \Rightarrow & du = \cos x\,dx \\ dv = e^{2x}\,dx & \Rightarrow & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}$$

Aplicando la fórmula se integración por partes:

$$\int \sin x\ e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x dx \tag{2.3}$$

$$\begin{array}{lll} u = \cos x & \Rightarrow & du = -\sin x \, dx \\ dv = e^{2x} \, dx & \Rightarrow & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array}$$

y sustituyendo en (2.3):

$$\begin{aligned} \int \sin x \; e^{2x} dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \cos x - \frac{-1}{2} \int e^{2x} \sin x dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x - \frac{1}{4} \int e^{2x} \sin x dx. \end{aligned}$$

Si volviéramos a aplicar la integración por partes a la última integral obtenida, no acabaríamos nunca, pues cada integral de la forma $\int \sin x \; e^{2x} dx$ se transforma en otra de la forma $\int \cos x \; e^{2x} dx$ y viceversa. Sin embargo, prestando atención al resultado obtenido:

$$\int \sin x \; e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x - \frac{1}{4} \int \sin x \; e^{2x} dx$$

observamos que la integral que aparece en ambos miembros de la igualdad es la misma. Tratando esta igualdad como una ecuación de primer grado en la que la incógnita es la integral que pretendemos calcular; es decir, pasando el término del segundo miembro que contiene a la integral al primero, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{4}\right) \int \sin x \; e^{2x} dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x \Rightarrow \\ \frac{5}{4} \int \sin x \; e^{2x} dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x \Rightarrow \\ \int \sin x \; e^{2x} dx &= \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x \right) + C \Rightarrow \\ \int \sin x \; e^{2x} dx &= \frac{2}{5} e^{2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{2x} \cos x + C. \; \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejercicio 2.4 Calcula $\int \cos 3x \; e^{x} dx$. (Sugerencia: aplica el método de integración por partes tomando $u = \sin x$, $dv = \sin x dx$ y procede como en el ejemplo anterior).

Integración de algunas funciones trascendentes

Ejemplo 2.10 Calcula $\int \arcsin x dx$.

Solución. En este caso las partes son:

$$\begin{array}{lll} u = \arcsin x & \Rightarrow & du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{array}$$

Aplicando la fórmula se integración por partes:

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Escribiendo la raíz de la integral del segundo miembro con exponente fraccionario, vemos que dicha integral es inmediata, así:

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= x \arcsin x - \frac{-1}{2} \int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejemplo 2.11 Calcula $\int x^3 \ln^2 x\, dx$.

Solución. En este caso las partes son:

$$\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & \Rightarrow \quad du = 2 \ln x \, \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x^3 \, dx & \Rightarrow \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array}$$

Aplicando la fórmula se integración por partes se tiene

$$\int x^3 \ln^2 x dx = \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \int \frac{x^4}{4} 2 \ln x \frac{1}{x} dx$$

de donde, simplificando, obtenemos:

$$\int x^3 \ln^2 x dx = \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{1}{2} \int x^3 \ln x dx$$

Volviendo a aplicar la integración por partes para calcular del segundo miembro, haciendo esta vez

$$\begin{array}{ll} u = \ln x & \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x^3 \, dx & \Rightarrow \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln^2 x dx &= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx \right) = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{x^4}{8} \ln x + \frac{1}{8} \int x^3 dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{x^4}{8} \ln x + \frac{x^4}{32} + C. \blacktriangle \end{aligned}$$

Integración por descomposición

El método de descomposición consiste en descomponer la función del integrando en suma de otras funciones más sencillas de integrar y calcular después la integral inicial aplicando la linealidad de la integral.

Nosotros sólo aplicaremos este método para el cálculo de la integral de algunas funciones racionales. Nos limitaremos, pues, al cálculo de integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas tales que el grado de $P(x)$ es inferior al de $Q(x)$ y $Q(x)$ es tal que sólo tiene raíces reales; es decir, todas las soluciones de la ecuación $Q(x) = 0$, son números reales.

Si el grado del polinomio del numerador fuera mayor o igual que el grado del polinomio del denominador, procederíamos a efectuar la división de polinomios:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

y aplicar la descomposición:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

siendo el grado de $R(x)$ inferior al de $Q(x)$. Resulta ahora:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

donde la primera integral del segundo miembro es inmediata (por ser la integral de una función polinómica) y la segunda es del tipo que pretendemos estudiar.

Para calcular la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, siendo $gr(P(x)) < gr(Q(x))$, hemos de realizar la descomposición en fracciones simples de la función del integrando, para ello procederemos según el siguiente esquema:

i) Hallamos las raíces del polinomio $Q(x)$, con el fin de obtener la descomposición factorial de dicho polinomio. En esta descomposición factorial, por la restricción impuesta anteriormente, sólo aparecerán factores de la forma $(x - \alpha)$ o de la forma $(x - \beta)^n$, siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $n = 2, 3, \ldots$

ii) Descomponemos la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples; es decir, en suma de fracciones de la forma:

   a) $\frac{A}{x-\alpha}$, por cada factor del tipo $(x - \alpha)$ que aparezca en la descomposición de $Q(x)$.

   b) $\frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(x-\beta)^n}$, por cada factor del tipo $(x-\beta)^n$ que aparezca en la descomposición de $Q(x)$.

iii) Determinamos las constantes que aparecen en los numeradores de las fracciones simples, igualando la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a su descomposición, como veremos en los ejemplos que vienen a continuación.

iv) Calcularemos la integral teniendo en cuenta que las integrales de las fracciones simples son inmediatas, pues:

a) $\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\int \frac{1}{x-\alpha}dx = A\ln|x-\alpha| + C.$

b) $\int \frac{B_k}{(x-\beta)^k}\,dx = B_k\int (x-\beta)^{-k}\,dx = B_k\,\frac{(x-\beta)^{-k+1}}{-k+1} + C,$
siempre que $k > 1$.

Ejemplo 2.12 Calcula $\int \frac{2x+5}{x^2-5x+4}dx.$

Solución. Las raíces del denominador son $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$, por tanto:

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$$

y la fracción del integrando se descompone en fracciones simples como:

$$\frac{2x+5}{x^2-5x+4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$$

de donde, reduciendo al mínimo común denominador

$$\frac{2x+5}{x^2-5x+4} = \frac{A(x-4)+B(x-1)}{(x-1)(x-4)}$$

Si las fracciones de ambos miembros son iguales, al ser iguales los denominadores (la descomposición del denominador de la primera es el denominador de la segunda), también lo serán los numeradores; en consecuencia:

$$2x + 5 = A(x-4) + B(x-1)$$

Dando valores a x en ambos miembros de la última igualdad obtenemos A y B:

$$x = 1 \Rightarrow 7 = -3A \Rightarrow A = \frac{-7}{3}$$

$$x = 4 \Rightarrow 13 = 3B \Rightarrow B = \frac{13}{3}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x+5}{x^2-5x+4}dx = \int \frac{\frac{-7}{3}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{13}{3}}{x-4}dx = \frac{-7}{3}\ln|x-1| + \frac{13}{3}\ln|x-4| + C \ \blacktriangle$$

Ejemplo 2.13 Calcula $\int \frac{x^4+2x^3-2x^2-4x+6}{x^3+3x^2-4}dx$.

Solución. Como el grado del numerador no es inferior al del denominador efectuamos la división, obteniendo como cociente $C(x) = x - 1$ y como resto $R(x) = x^2 + 2$. De aquí:

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2-4x+6}{x^3+3x^2-4} = x - 1 + \frac{x^2+2}{x^3+3x^2-4}$$

Para calcular la integral de la fracción del segundo miembro comenzamos por descomponer el polinomio del denominador, obteniendo:

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2}{x^3+3x^2-4} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} = \\ &= \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}\end{aligned}$$

Igualando los numeradores:

$$x^2 + 2 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)$$

Dando valores a x, obtenemos los valores de A, B y C:

$$\begin{aligned}x &= 1 \Rightarrow 3 = 9A \Rightarrow A = \frac{1}{3} \\ x &= -2 \Rightarrow 6 = -3C \Rightarrow C = -2 \\ x &= 0 \Rightarrow 2 = 4A - 2B - C \Rightarrow 2 = \frac{4}{3} - 2B + 2 \Rightarrow B = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{x^3+3x^2-4}dx &= \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{2}{3}}{x+2}dx + \int \frac{-2}{(x+2)^2}dx = \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|x+2| - 2\frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\int \frac{x^4+2x^3-2x^2-4x+6}{x^3+3x^2-4}dx = \int (x-1)dx + \int \frac{x^2+2}{x^3+3x^2-4}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3}\ln|x-1| + \tfrac{2}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{x+2} + C. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 2.14 Calcula $\int \frac{x^3+x+2}{x^4+6x^3+12x^2+8x}dx.$

Solución. La descomposición factorial del polinomio del denominador es

$$x(x+2)^3$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x+2}{x^4+6x^3+12x^2+8x} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3}= \\ &= \frac{A(x+2)^3+Bx(x+2)^2+Cx(x+2)+Dx}{x(x+2)^3}\end{aligned}$$

Por tanto:

$$x^3+x+2 = A(x+2)^3+Bx(x+2)^2+Cx(x+2)+Dx$$

Dando valores a x obtenemos los valores de A, B, C y D:

$$\begin{aligned} x &= 0 \Rightarrow 2 = 8A \Rightarrow A = \frac{1}{4} \\ x &= -2 \Rightarrow -8 = -2D \Rightarrow D = 4 \\ x &= 1 \Rightarrow 4 = 27A+9B+3C+D \\ x &= -1 \Rightarrow 0 = A-B-C-D \end{aligned}$$

Sustituyendo en las dos últimas igualdades los valores obtenidos para A y D, obtenemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\left\{\begin{array}{l} 9B+3C=-\frac{27}{4} \\ -B-C=\frac{15}{4} \end{array}\right.$$

de donde $B=\frac{3}{4}$ y $C=-\frac{9}{2}$. Con todo ello podemos escribir:

$$\int \frac{x^3+x+2}{x^4+6x^3+12x^2+8x}dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{x}dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{x+2}dx + \int \frac{-\frac{9}{2}}{(x+2)^2}dx + \int \frac{4}{(x+2)^3}dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\ln|x| + \tfrac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{9}{2(x+2)} - \frac{2}{(x+2)^2} + C. \blacktriangle$$

Integración por sustitución

Este método consiste en sustituir la función del integrando, $f(x)$, por una nueva función que dependa de otra variable, por ejemplo t; es decir, hacemos $x = g(t)$ y diferenciamos en ambos miembros, obteniendo $dx = g'(t)dt$. Al sustituir en la integral inicial se obtiene, si hemos elegido adecuadamente la función $g(t)$, una integral más fácil de calcular:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))f'(t)dt = F(t)+C$$

Ahora, una vez resuelta la integral en la variable t, deshacemos el cambio de variable obteniendo

$$\int f(x)dx = F(h(x)) + C,$$

siendo $t = h(x)$ la inversa de la función inversa de la función $x = g(t)$.

Además de elegir la función $g(t)$ de forma que la integral resultante tras el cambio de variable sea más sencilla de resolver que la integral original, la función $g(t)$ ha de ser una función que admita función derivada continua y no nula y tal que admita función inversa $t = h(x)$.

Ejemplo 2.15 Calcula $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

Solución. Puesto que en el integrando aparece una raíz cuadrada y una raíz cúbica, realizamos el cambio de variable

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5dt$$

para que desaparezcan ambas raíces.

Sustituyendo en la integral tenemos:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{\sqrt{t^6}}{1+\sqrt[3]{t^6}}6t^5dt = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt$$

que es una integral racional, cuya resolución hemos estudiado en la sección anterior.

Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador efectuamos la división entera, obteniendo como cociente $c(t) = t^6 - t^4 + t^2 - 1$ y como resto $r(t) = t^2 + 1$, de donde

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx &= 6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt = 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \\ &= 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctan t\right) + C\end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable ($x = t^6 \Leftrightarrow t = \sqrt[6]{x}$):

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = 6\left(\frac{x\sqrt[6]{x}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} - \sqrt[6]{x} + \arctan\sqrt[6]{x}\right) + C. \blacktriangle$$

Ejercicio 2.5 Calcula $\displaystyle\int \frac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}dx.$

2.2. LA INTEGRAL DEFINIDA

2.2.1. Introducción

Para llegar al concepto de integral nos plantearemos el cálculo del área de la región encerrada por la gráfica de una función positiva y acotada $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ (figura 2.1). Para ello, dividiremos la región en rectángulos y obtendremos una aproximación del área buscada sumando las áreas de dichos rectángulos.

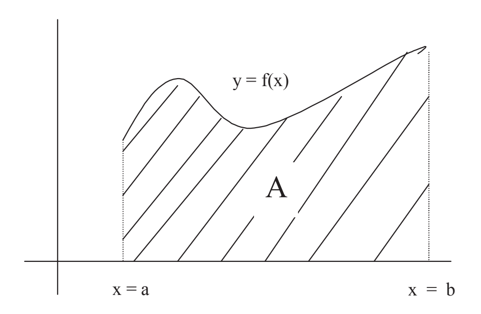


Figura 2.1: Área de una región plana

Ejemplo 2.16 Queremos hallar el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 5$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución. Dividimos el intervalo $[0, 2]$ en 5 subintervalos:

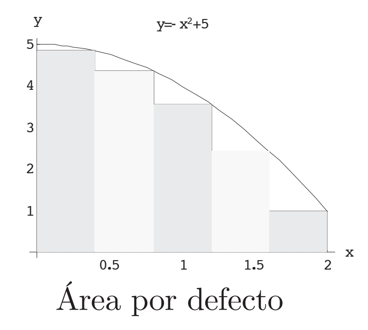
$$\left[0, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right], \left[\frac{8}{5}, 2\right].$$

Evaluamos la función en cada uno de los extremos derechos de cada subintervalo; es decir, consideramos el menor valor que toma f en cada subintervalo, ya que f es decreciente; en este caso, el área de cada rectángulo obtenido es:

$$(x_i - x_{i-1})f(x_i).$$

Podemos aproximar (por defecto) el área de la región mediante la suma de estos 5 rectángulos,

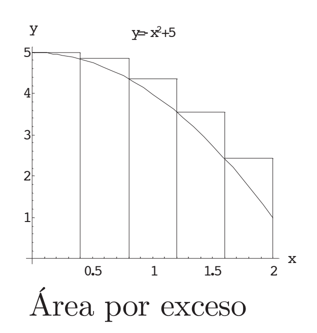
$$A \approx \sum_{i=1}^{5}(x_i - x_{i-1})f(x_i) \approx 6.48 \longrightarrow A > 6.48.$$



Área por defecto

Con un razonamiento análogo, tomando como altura de cada rectángulo la imagen del extremo izquierdo de cada subintervalo; es decir, el mayor valor que toma f en cada subintervalo, obtenemos una aproximación por exceso,

$$A \approx \sum_{i=1}^{5}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) \approx 8.08 \longrightarrow A > 8.08.$$



Área por exceso

Luego, en una primera aproximación podemos decir que el área está comprendida entre los siguientes valores: 6.48< A <8.08. Si aumentamos el número de rectángulos, por ejemplo 25 y repetimos el proceso se tiene 7.17< A <7.49. En el segundo caso las aproximaciones son mejores, al hacer que la longitud de las bases tienda a 0, y por lo tanto el número de rectángulos tienda a ∞, obtendremos el valor exacto 7.3333...▲

Un estudio similar se puede hacer si tomamos como alturas de los rectángulos el valor de la función en un punto intermedio cualquiera $\bar{x}_i$ de cada subintervalo. En este caso,

$$A \approx \sum_{i=1}^{5}(x_i - x_{i-1})f(\bar{x}_i)$$

La formalización matemática de lo que se ha expuesto nos permite separar la noción de integral de la idea intuitiva de área.

2.2.2. Integral de Riemann. Propiedades

La construcción detallada vista en el ejemplo anterior nos da pie a introducir los conceptos básicos necesarios.

Definición 2.3 *Dado un intervalo compacto* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*, se llama* partición *de* $[a, b]$ *a cualquier conjunto finito de números reales*

$$P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n = b\}$$

que verifique

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

- De esta forma $[a, b]$ queda dividido en n subintervalos.
- $[x_{i-1}, x_i]$ es el intervalo i-ésimo de la partición.
- Si tomamos la partición de modo que todos los subintervalos midan lo mismo, entonces, se verifica que hacer tender a 0 su longitud equivale a que $n \to \infty$.

Definición 2.4 Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo $[a, b]$ y sea $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Si el

siguiente límite existe, se dice que la función f es *integrable* y se define la *integral de Riemann* de f en $[a, b]$ como

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

donde $\bar{x}_i$ es un punto intermedio cualquiera del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si el límite no existe se dice que la función f *no es integrable.*

Propiedad 2 *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Propiedad 3 *Si f es continua a trozos en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Propiedades de la integral definida

i) *Linealidad.* Si f y g son dos funciones reales, integrables en $[a, b]$, entonces también es integrable la función $hf + kg$ para cualesquiera $h, k \in \mathbb{R}$ y además

$$\int_a^b (hf + kg) = h \int_a^b f + k \int_a^b g.$$

ii) *Integrabilidad del producto y del cociente.* Sean f y g reales e integrables en $[a, b]$. Entonces $f \cdot g$ es integrable en $[a, b]$. Si $g(x) \neq 0$ en $[a, b]$, entonces $\frac{f}{g}$ es integrable en $[a, b]$.

iii) *Aditividad respecto del intervalo.* Sea f acotada en $[a, b]$ y $c \in\ ]a, b[$. Entonces f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si lo es en $[a, c]$ y en $[c, b]$. En este caso se cumple:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Esta propiedad constituye la base para algunas convenciones de notación, cuando cambiamos los límites de integración, cambia el signo de la integral; es decir, $\int_b^a f = -\int_b^a f$. Si los límites de integración son iguales, la integral vale 0; esto es, $\int_a^a f = 0$.

Las integrales definidas pueden tomar valores positivos, negativos o nulos pero para interpretarlas como el área deben satisfacer las condiciones del teorema siguiente.

Teorema 6 *Si f es continua y no negativa en $[a, b]$ entonces el área comprendida entre la gráfica de f, el eje de abcisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b f$.*

Ejemplo 2.17 El área limitada por la gráfica de $f(x) = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ viene dada por

$$A = \int_0^1 x^3 dx$$

puesto que $f(x) = x^3 > 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

2.2.3. El Teorema Fundamental del Cálculo Integral

El cálculo de integrales aplicando la definición de integral de Riemann es generalmente difícil. El Teorema Fundamental del Cálculo Integral nos proporciona métodos de cálculo de integrales y además establece la conexión entre derivación e integración.

Definición 2.5 Dada una función f real integrable en el intervalo $[a, b]$, la función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

se llama *integral indefinida o función integral de f correspondiente al punto a.*

Teorema 7 (Teorema fundamental del Cálculo Integral) *Si f es continua en $[a, b]$, entonces F es derivable en $[a, b]$ y además $F'(x) = f(x)$ para cualquier $x \in [a, b]$.*

Una consecuencia inmediata de este teorema es que proporciona un método práctico para hallar integrales conocido como la regla de Barrow:

Corolario 1 (Regla de Barrow) *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en el intervalo $[a, b]$ y si $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f en dicho intervalo, entonces se verifica que*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_{x=a}^{x=b}$$

Ejemplo 2.18 Calcula las siguientes integrales:

a) $\int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

b) $\int_0^1 x^n\, dx$ siendo $n \neq -1$.
$\int_0^1 x^n\, dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln x]_{x=1}^{x=2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

d) $\int_0^1 x\, e^{x^2}\, dx = [\frac{1}{2}e^{x^2}]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}(e - 1)$

2.2.4. Cálculo de áreas de figuras planas

Al principio del tema se introduce la integral con el fin de obtener, dentro de lo posible, áreas de figuras planas. Veamos ahora cómo aplicarlo en la práctica. La integral no sólo se aplica en el caso de las áreas, sino que también nos permite calcular áreas de superficies de revolución, volúmenes y longitudes de curvas, al menos en determinados casos de particular interés y tiene además interesantes aplicaciones en la física.

Abordamos el cálculo de áreas de un determinado conjunto de puntos del plano C.

Área entre una curva y el eje de abcisas.

Dada una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, el área del conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas, y las rectas $x = a$ y $x = b$ es:

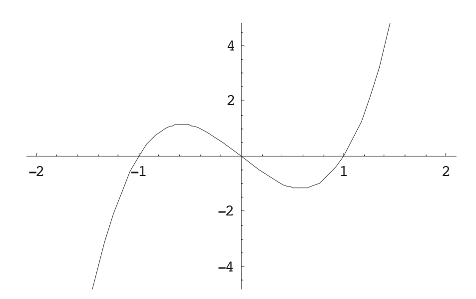
$$A(C) = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

La integral de $|f(x)|$ se calcula del siguiente modo:

- si la función f es positiva en todo el intervalo, es decir: $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, entonces
$$A(C) = \int_a^b f(x)dx$$
- si la función f es negativa en todo el intervalo, es decir: $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$, entonces el valor de la integral es negativo, por ello hemos de cambiar el signo para que el área sea un valor positivo:
$$A(C) = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = - \int_a^b f(x)dx$$
- si la función f cambia de signo un número finito de veces en el intervalo $[a, b]$, determinaremos los puntos de corte de f con el eje OX. En cada subintervalo así obtenido, f tendrá signo constante y aplicaremos los casos anteriores. El área total vendrá dada como suma de integrales en cada uno de los subintervalos donde el signo de f permanece constante.

Ejemplo 2.19 Halla el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = 3(x^3 - x)$ y el eje de abcisas.

Solución. Como se observa en la gráfica, $f(x) \geq 0$ para $-1 \leq x \leq 0$ y $f(x) \leq 0$ para $0 \leq x \leq 1$:



por tanto el área vendrá dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 3(x^3 - x)dx + \left| \int_0^1 3(x^3 - x)dx \right| = \int_{-1}^0 3(x^3 - x)dx - \int_0^1 3(x^3 - x)dx = \\ &= 3 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - 3 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 3 \left(0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) \right) - 3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{3}{2} \text{ unidades de área. } \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejercicio 2.6 Calcula el área de la región del plano comprendida entre la parábola $y = -x^2 - x + 2$, la recta $x = -3$, la recta $x = 2$ y el eje de abcisas.

Ejercicio 2.7 Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$ y el eje OX.

Área encerrada entre dos curvas

Consideremos f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y sea C el conjunto limitado por la curva $y = f(x)$, la curva $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$. El área de C viene dada por:

$$A(C) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Para integrar $|f(x) - g(x)|$ tendremos en cuenta que:

- si $f(x) \geq g(x)$ en todo el intervalo $[a, b]$:

$$A(C) = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

- si $g(x) \geq f(x)$ en todo el intervalo $[a, b]$:

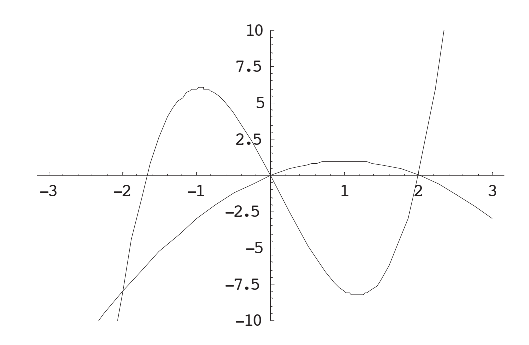
$$A(C) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$

- si las gráficas de f y g se cortan en el intervalo $[a, b]$, tendremos que separar las integrales entre los puntos de corte de ambas curvas, obtenidos al resolver la ecuación $f(x) - g(x) = 0$, y aplicar en cada subintervalo los casos anteriores.

Ejemplo 2.20 Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.

Solución. Calculamos los puntos de corte de ambas curvas:

$$3x^3 - x^2 - 10x - (-x^2 + 2x) = 0$$
$$3x^3 - 12x = 0 \rightarrow x = 0,\; x = 2,\; x = -2$$



Observamos en la gráfica que en $[-2,0]$ la gráfica de f está por encima de la gráfica de g, mientras que en el intervalo $[0,2]$ es la gráfica de g la que está por encima, por tanto:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx+\int_{0}^{2}(g(x)-f(x))dx= \\ &= \int_{-2}^{0}(3x^3-12x)dx+\int_{0}^{2}(-3x^3+12x)dx=24 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Si no se dispone de información sobre la posición relativa de ambas gráficas, podemos asegurarnos los valores de la integral utilizando valores absolutos, así:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2}|f(x)-g(x)|\,dx=\left|\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx\right|+\left|\int_{0}^{2}(f(x)-g(x))dx\right|= \\ &= \int_{-2}^{0}(3x^3-12x)dx+\int_{0}^{2}(-3x^3+12x)dx=24 \text{ u.a. } \blacktriangle \end{aligned}$$

Ejercicio 2.8 Halla el área comprendida entre las curvas $y=\sin x$ e $y=\cos x$ en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

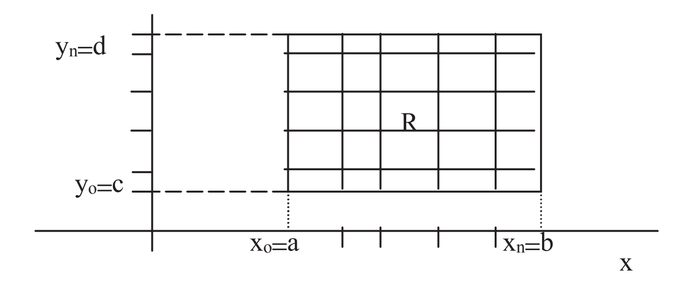
Ejercicio 2.9 Calcula el área de la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=x^2-2x$

2.3. LA INTEGRAL DOBLE

2.3.1. Introducción

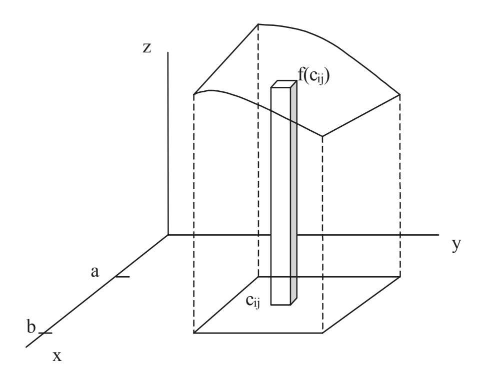
En este apartado vamos a estudiar la integración de una función de dos variables $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sobre un rectángulo $R\subseteq\mathbb{R}^2$. Si la integración de funciones de una variable tenía su origen en la búsqueda del área de una región plana, la intregración de funciones de varias variables, tiene una motivación similar: la determinación del volumen de un sólido en el espacio.

Si la función f es continua y no negativa en el rectángulo R, la ecuación $z=f(x,y)$ representa una superficie que está por encima de R. Supongamos que queremos calcular el volumen del espacio bajo dicha supercie, sobre el rectangulo R. Hacemos una partición del rectangulo R en $n\times n$ subintervalos iguales,



y tomamos un punto intermedio en cada uno de ellos $\vec{c}_{ij}$. Si multiplicamos el

área de cada subintervalo, dada por $\Delta x \Delta y$, por el valor $f(\vec{c}_{ij})$, se obtiene el volumen de un paralelepípedo de base dicho rectángulo y altura $f(\vec{c}_{ij})$:



La suma de los volúmenes de todos estos paralelepípedos es una aproximación al volumen buscado, es decir:

$$\text{volumen} \approx \sum_{i,j=1}^{n} f(\vec{c}_{ij}) \Delta x \Delta y$$

2.3.2. La integral como límite de sumas de Riemann

Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables definida sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, acotada y con valores reales . Sea P una partición regular de $R = [a, b] \times [c, d]$ de orden n; es decir, dos colecciones ordenadas de $n + 1$ puntos igualmente espaciados $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $\{y_j\}_{j=0}^{n}$ tales que $x_o = a < x_1 < ... < x_n = b$, $y_o = c < y_1 < ... < y_n = d$ con $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $\Delta y = y_i - y_{i-1} = \frac{d-c}{n}$.

Entonces:

Definición 2.6 Diremos que una función f es *integrable* sobre el rectángulo R si existe el siguiente límite, siendo dicho límite la *integral doble* de f en R,

$$\iint_R f = \lim_{n \to \infty} \sum_{i,j=1}^{n} f(\vec{c}_{ij}) \Delta x \Delta y$$

Propiedad 4 *Toda función continua definida sobre un rectángulo es integrable.*

2.3.3. Propiedades de las integrales dobles

Las propiedades fundamentales de la integral $\iint_R f(x, y)dA$ son, esencialmente, las mismas que para la integral en una variable. Destacamos las siguientes:

i) Linealidad: si f y g son funciones integrables en el rectángulo R y $c \in \mathbb{R}$, entonces $f + g$ y cf son integrables en R y además

$$\iint_R (f + g) = \iint_R f + \iint_R g, \quad \iint_R cf = c \iint_R f$$

ii) Aditividad: si R_i, $i = 1, ..., m$ son rectángulos disjuntos con $R = R_1 \cup ... \cup R_m$ rectángulo y f es integrable en cada R_i, entonces f es integrable en R y además

$$\iint_R f = \sum_{i=1}^{m} \iint_{R_i} f$$

2.3.4. Cálculo de integrales dobles

El principio de Cavalieri nos proporciona un método geométrico para calcular volúmenes. Dado un cuerpo sólido, si $A(x)$ denota el área de su sección transversal medida a una distancia x del plano de referencia, entonces el volumen de dicho sólido está dado por $\int_a^b A(x)dx$, donde a y b son las distancias mínima y máxima a partir del plano de referencia. Usaremos este principio para evaluar integrales dobles.

Consideremos la región sólida bajo la gráfica de la función $z = f(x, y)$ definida en la región $[a, b] \times [c, d]$ donde f es continua y no negativa. La sección transversal determinada por un plano cortante $x = x_o$ es la región plana bajo la gráfica de $z = f(x_o, y)$ desde $y = c$ hasta $y = d$; por tanto, su área es

$$A(x_o) = \int_c^d f(x_o, y)dy.$$

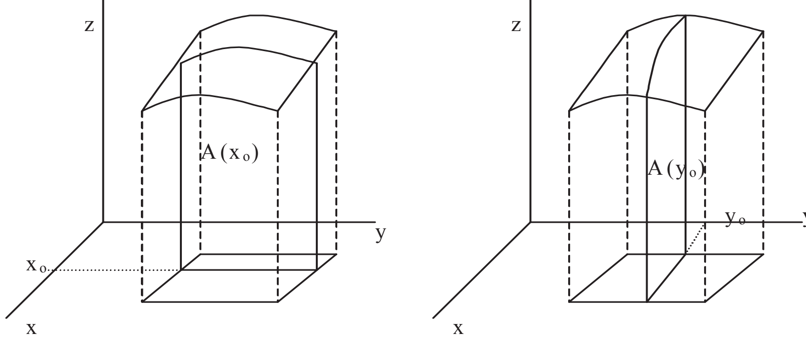
Entonces, el volumen $V = \int\int_R f(x, y)dA$ de la región debe ser

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx$$

Esta integral se conoce como integral iterada pues se obtiene integrando respecto a y y luego respecto a x.

Invirtiendo los papeles de x y de y, obtenemos

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right] dy$$



El siguiente teorema justifica, mediante sumas de Riemann, esta reducción.

Teorema 8 (Teorema de Fubini) *Si f es una función continua con dominio rectangular $R = [a,b] \times [c,d]$. Entonces:*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Ejemplo 2.21 Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{1}\int_{-1}^{3} \left(2xy^2 - 3x^2y^3\right)\, dx\, dy.$

Solución. Calculamos en primer lugar

$$\int_{-1}^{3} \left(2xy^2 - 3x^2y^3\right) dx$$

y el resultado lo integraremos respecto de y en el intervalo $[-2,1]$.

$$\int_{-1}^{3} \left(2xy^2 - 3x^2y^3\right) dx = \left[x^2y^2 - x^3y^3\right]_{-1}^{3} = \left(9y^2 - 27y^3\right) - \left(y^2 + y^3\right) = 8y^2 - 28y^3$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}\int_{-1}^{3} \left(2xy^2 - 3x^2y^3\right) dxdy &= \int_{-2}^{1} \left(8y^2 - 28y^3\right) dy = \left[\frac{8y^3}{3} - \frac{28y^4}{4}\right]_{-2}^{1} = \\ &= \left(\frac{8}{3} - 7\right) - \left(\frac{-64}{3} - 112\right) = 129. \blacktriangle\end{aligned}$$

Ejercicio 2.10 Verifica que al intercambiar el orden de integración no se altera el resultado.

Ejemplo 2.22 Calcula $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} (\sin x \cos 2y - \cos 2x \sin y)\, dydx.$

Solución. Para calcular $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} (\sin x \cos 2y - \cos 2x \sin y)\, dydx$ calculamos en primer lugar la integral de $f(x,y) = \sin x \cos 2y - \cos 2x \sin y$ respecto de y en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{4}, 0\right]$:

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} (\sin x \cos 2y - \cos 2x \sin y)\, dy = \left[\frac{1}{2}\sin x \sin 2y + \cos 2x \cos y\right]_{\frac{-\pi}{4}}^{0} = \\ &\quad = (0 + \cos 2x) - \left(\tfrac{-1}{2}\sin x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right) = \tfrac{1}{2}\sin x + \tfrac{2-\sqrt{2}}{2}\cos 2x.\end{aligned}$$

Y ahora

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{2-\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right) dx = \left[\frac{-1}{2}\cos x + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \\ &\quad = \left(\tfrac{-\sqrt{2}}{4} + \tfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right) - \left(\tfrac{-1}{2} + 0\right) = \tfrac{2-\sqrt{2}}{2}. \blacktriangle\end{aligned}$$

Ejemplo 2.23 Evalúa la integral $\int_0^1 \int_1^2 \left(ye^x - y^2e^{2x}\right) dydx.$

Solución.

$$\int_0^1 \int_1^2 \left(ye^x - y^2e^{2x}\right) dydx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}e^x - \frac{y^3}{3}e^{2x}\right]_1^2 dx =$$
$$= \int_0^1 \left[\left(2e^x - \frac{8}{3}e^{2x}\right) - \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}\right)\right] dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}e^x - \frac{7}{3}e^{2x}\right) dx =$$
$$= \left[\frac{3}{2}e^x - \frac{7}{6}e^{2x}\right]_0^1 = \left(\frac{3}{2}e - \frac{7}{6}e^2\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{6}\right) = \frac{3}{2}e - \frac{7}{6}e^2 - \tfrac{1}{3}. \ \blacktriangle$$

Ejercicio 2.11 Calcula $\int_{-2}^1 \int_0^1 (x^2y^3 + 2y^2x)\ dx\ dy$

Ejercicio 2.12 Halla $\int_0^1 \int_1^3 (4xy^3 - y\ e^{2x})\, dy\, dx$

Ejercicio 2.13 Calcula la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \cos 2x \sin y\, dx\, dy.$

Bibliografía

[1] P. Alegre y otros. *Ejercicios resueltos de matemáticas empresariales.* Ed. AC. (1990).

[2] M. Barreda, B. Campos, J. Castello y S. Macario. *Problemes de càlcul amb aplicacions a l'economia.* Publicacions de la Universitat Jaume I, Castelló (1998).

[3] S. Blanco, P. Garcia, E. del Pozo. *Matemáticas Empresariales I. vol 2. Cálculo Diferencial.* Ed. AC Thomson, Madrid (2003).

[4] A. Camara Sanchez y otros. *Problemas resueltos de Matemáticas para Economía y Empresa.* Ed. AC Thomson, (2003).

[5] J. Casany, J. Castello, F. Plaza. *Cálculo integral.* Ed. Nau Llibres, València (1992).

[6] Larson, R. E., R. P. Hostetler, B. H. Edwards. *Cálculo y Geometría Analítica.* McGraw-Hill, Madrid, 1989. Vol 2.

[7] K. Sydsaeter, P. Hammond. *Matemáticas para el Análisis Económico.* Prentice Hall, Madrid (1996).